Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

8 клас

8.1. (*Лішунов Віталій*) Для деяких дійсних чисел x, y, z має місце рівність $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}$. Які значення може приймати вираз $\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$?

Відповідь: $\frac{9}{4}$.

Розв'язання. Нехай $B=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=\frac{3}{2}$ і $A=\frac{1}{(x-y)^2}+\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}$, тоді $B^2=\frac{9}{4}=A+2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}\right)$. Зробимо перетворення другого доданку останнього виразу: $\frac{1}{(x-y)(y-z)}+\frac{1}{(x-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-z)(z-x)}=\frac{(z-x)+(y-z)+(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$, тому $A=\frac{9}{4}$.

Хоч цього не вимагає умова, але треба переконатись, що такі числа x, y, z, що задовольняють задану умову існують. Покладемо $x=2$, $y=1$, $z=0$, тоді $(x-y)=1$, $(y-z)=1$, $(z-x)=-2$, $B=1+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ і $A=1+1+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$.

8.2. (*Маліцький Юрій*) З'ясуйте, яких п'ятицифрових чисел більше: тих, у яких цифри йдуть у строго зростаючому порядку зліва направо, або тих, у яких кожна цифра не перевищує 5 та цифри ідуть у неспадному порядку зліва направо (наприклад, число 12459 задовольняє першій умові, а 22589 та 01234 — ні; число 11145 задовольняє другій умові, а 21224, 12346 та 01234 — ні)?

Відповідь: чисел однакова кількість.

Розв'язання. Покажемо, що таких чисел однакова кількість, для цього кожному числу одного набору поставимо у відповідність єдине число з другого. Достатньо числу $\overline{abcde}$ першого набору поставити у відповідність число $\overline{a(b-1)(c-2)(d-3)(e-4)}$. Це показує, що кількість чисел в наборах однакова.

8.3 (*Клурман Олексій*) На стороні BC трикутника ABC позначили точку M так, що $BM=AC$. Точка H — основа перпендикуляра, проведеного з точки B на пряму AM. Відомо, що $BH=CM$ і $\angle MAC=30°$. Знайдіть градусну міру кута $\angle ACB$.

Відповідь: $15°$ або $105°$.

Розв'язання. Нехай $AC=BM=b$, $BH=MC=h$. Легко показати, що точка H не може належати відрізку AM. Розглянемо два випадки.

1) Точка H належить променю MA (рис.1). Проведемо перпендикуляр $LC\perp AM$, точка L лежить на прямій AM. З прямокутного ΔALC з кутом $30°$ $LC=\frac{1}{2}b$. Зрозуміло, що $\angle MCL=\angle MBH$ = $\cos\angle MCL=\frac{LC}{MC}=\frac{b}{2h}=$ $=\cos\angle MBH=\frac{BH}{BM}=\frac{h}{b}$ = $\frac{b}{2h}=\frac{h}{b}$ і $b^2=2h^2$, тому $\cos\angle MCL=\frac{b}{2h}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, звідси $\angle MCL=45°$, оскільки $\angle LCA=60°$, то $\angle ACB=15°$.

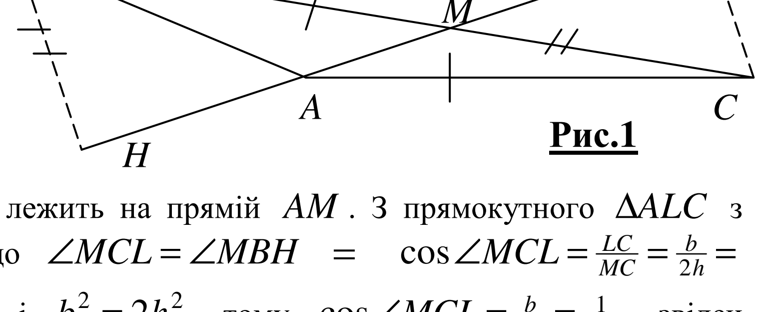


Рис.1

2) Нехай точка H належить променю AM (рис.2). Проведемо перпендикуляр $LC \perp AM$, точка L лежить на прямій AM. Тоді повністю аналогічно попередньому розв'язанню одержимо, що $\angle MCL = 45°$, оскільки $\angle LCA = 60°$, то $\angle ACB = 105°$.

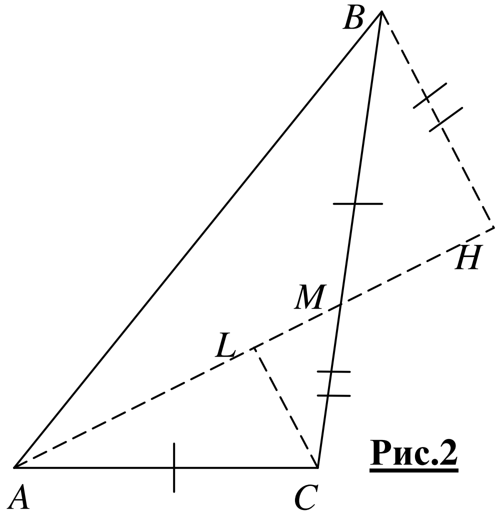


Рис.2

8.4. (*Торба Сергій*) Розв'яжіть в цілих невід'ємних числах n, m, k рівняння: $3^n + 4^m = 5^k$.

Відповідь: $(2,2,2)$, $(0,1,1)$.

Розв'язання. Нехай $n \ge 1$, $m \ge 1$.

Спочатку розглянемо рівняння за модулем 3: $4^m \equiv 1 (\bmod 3)$, отже при $n \ge 1$ $3^n + 4^m \equiv 1 (\bmod 3)$, тому повинно бути $5^k \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow k = 2k_1$.

Розглянемо тепер рівняння за модулем 4: $5^k \equiv 1 (\bmod 4) \Rightarrow 5^k - 4^m \equiv 1 (\bmod 4)$, тому повинно бути $3^n \equiv 1 (\bmod 4) \Rightarrow n = 2n_1$.

Таким чином ми маємо таке рівняння: $3^{2n_1} + 4^m = 5^{2k_1} \Rightarrow 3^{2n_1} = (5^{k_1} - 2^m)(5^{k_1} + 2^m)$, звідки випливає, що $\begin{cases} 5^{k_1} - 2^m = 3^p \\ 5^{k_1} + 2^m = 3^s \end{cases}$, $0 \le p < s$, $p + s = 2n_1$.

Додамо одержані два рівняння: $2 \cdot 5^{k_1} = 3^p (1 + 3^{s-p})$, тому $p = 0$, отже $s = 2n_1$ і система набуває такого вигляду $\begin{cases} 5^{k_1} - 2^m = 1 \\ 5^{k_1} + 2^m = 3^{2n_1} \end{cases}$. Віднімемо ці рівняння $2^{m+1} = 3^{2n_1} - 1 = (3^{n_1} - 1)(3^{n_1} + 1) \Rightarrow \begin{cases} 3^{n_1} - 1 = 2^q \\ 3^{n_1} + 1 = 2^t \end{cases}$, де $0 \le q < t$, $q + t = 2n_1$. Оскільки $(3^{n_1} - 1, 3^{n_1} + 1) = 2$, то $q \le 1$, звідки очевидно, що $q = 1$ і $3^{n_1} - 1 = 2 \Rightarrow n_1 = 1$, і попередня система набуває такого вигляду $\begin{cases} 5^{k_1} - 2^m = 1 \\ 5^{k_1} + 2^m = 9 \end{cases}$. Оскільки k_1 і m — цілі невід'ємні, то простий перебір для другого рівняння системи дає рівно два можливих розв'язки: $k_1 = 0, m = 3$ або $k_1 = 1, m = 2$, з урахування першого рівняння залишається єдиний можливий розв'язок: $k_1 = 1, m = 2$. З нього легко знаходимо шуканий розв'язок: $(n, m, k) = (2n_1, m, 2k_1) = (2,2,2)$.

Залишається розглянути випадки, що оговорені на початку розв'язку.

$m = 0 \Rightarrow 3^n + 1 = 5^k$, що суперечить міркуванням парності при натуральних n, k, при нулях — простий перебір показує відсутність розв'язків.

$n = 0 \Rightarrow 1 + 4^m = 5^k$. Розглянемо ці рівняння за модулем 3: $1 + 4^m \equiv 2 (\bmod 3)$, тому $5^k \equiv 2 (\bmod 3) \Rightarrow k = 2k_2 + 1$. Далі розглянемо це рівняння за модулем 8. При $m \ge 2$ $1 + 4^m \equiv 1 (\bmod 8)$, а $5^{2k_2+1} = 5 \cdot 25^{k_2} \equiv 5 (\bmod 8)$, і одержана суперечність показує, що $m \le 1$. Оскільки випадок $m = 0$ розглянутий вище, то залишається перевірити $m = 1$, звідки одержимо таке рівняння: $1 + 4 = 5^k \Rightarrow$ маємо ще один розв'язок $(n, m, k) = (0,1,1)$.

9 клас

9.1. (<u>*Анікушин Андрій*</u>) Відомо, що $x^2+(y-4)^2=1$. Знайдіть найменше та найбільше значення виразу $|x|+|y|$.

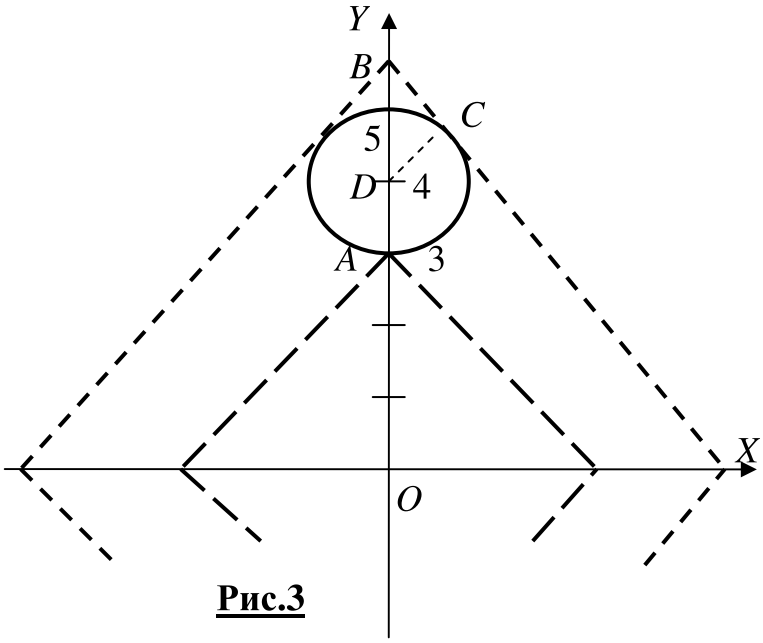


Рис.3

<u>Відповідь</u>: $\min(|x|+|y|)=3$, $\max(|x|+|y|)=4+\sqrt{2}$.

<u>Розв'язання</u>. Графіком рівняння $|x|+|y|=a$ $(a>0)$ є квадрат, графіком рівняння $x^2+(y-4)^2=1$ є коло, з центром в точці $(0{,}4)$ і радіусом 1. Найменше значення виразу $|x|+|y|$ відповідає положенню квадрата, яке має з колом єдину спільну точку $A(0{,}3)$. Найбільше значення досягається тоді, коли коло дотикається зсередини сторін квадрата (<u>рис.3</u>).

Тому для найменшого значення очевидно, що $a=3$.

Для найбільшого значення розглянемо точку C, в якій коло дотикається до сторони квадрата. Бачимо, що ΔDBC — прямокутний та рівнобедрений, його катет $DC=1$ — радіус кола, а тому $DB=\sqrt{2}$, остаточно $a=OB=4+\sqrt{2}$.

9.2. (<u>*Рубльов Богдан*</u>) За один крок дозволяється замінити трійку чисел (a,b,c) (порядок яких не суттєвий) на трійку $(a_1\ ,b_1,c_1)$ за наступним правилом:

$$a_1=\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}\ ,\ b_1=\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}\ ,\ c_1=\sqrt{2b^2+2a^2-c^2}\ .$$

Чи можливо за скінченну кількість кроків з трійки $\{3,\sqrt{19},\sqrt{22}\}$ одержати:

а) трійку $\left(\sqrt{3^{2007}\cdot 2},\ \sqrt{3^{2007}\cdot 4},\ \sqrt{3^{2007}\cdot 6}\right)$;

б) трійку $\left(\sqrt{3^{2008}\cdot 4},\ \sqrt{3^{2008}\cdot 13},\ \sqrt{3^{2008}\cdot 33}\right)$?

<u>Відповідь</u>: в обох пунктах не можна.

<u>Розв'язання</u>. ***а)*** При такому перетворенні сума квадратів елементів множини за кожний крок збільшується в 3 рази, тому на кожному кроці $a_n^2+b_n^2+c_n^2=3^n(9+19+22)=$ $=3^n\cdot 50\neq 3^{2007}(2+4+6)=3^{2007}\cdot 12$ ні при якому n.

б) Легко побачити, що фактично з трійки (a_k, b_k, c_k) ми будуємо трійку чисел, які виражають подвоєні довжини медіан трикутника з такими сторонами. Добре відомо, що з медіан так само завжди можна побудувати трикутник. Але з трикутника із сторонами $2,\sqrt{13},\sqrt{33}$ не існує, оскільки $4+13+4\sqrt{13}<33$.

9.3. (<u>*Петровський Дмитро*</u>) Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a,b,c, виконується нерівність:

$$\tfrac{a+b}{2b+c}+\tfrac{b+c}{2c+a}+\tfrac{c+a}{2a+b}\geq 2\ .$$

Розв'язання. З нерівності Коші — Буняковського для наборів $\frac{a_1}{\sqrt{b_1}},...,\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}$ та $\sqrt{b_1},...,\sqrt{b_n}$, де числа $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ — додатні, випливає нерівність $\frac{a_1^2}{b_1}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+...+a_n)^2}{b_1+...+b_n}$. Далі робимо такі перетворення: $\frac{a+b}{2b+c}+\frac{b+c}{2c+a}+\frac{c+a}{2a+b}=\frac{(a+b)^2}{(a+b)(2b+c)}+\frac{(b+c)^2}{(b+c)(2c+a)}+\frac{(c+a)^2}{(c+a)(2a+b)}\ge$ (тут ми скористаємось наведеною нерівністю) $\ge\frac{((a+b)+(b+c)+(c+a))^2}{(a+b)(2b+c)+(b+c)(2c+a)+(c+a)(2a+b)}\ge 2$, останній перехід просто перевіряється розкриттям дужок та зведенням подібних доданків.

9.4. (*Примак Андрій*) Коло, вписане в трикутник ABC дотикається до сторін BC, CA і AB в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Через середину відрізку A_1B_1 проведено пряму, перпендикулярну до AB, через середину B_1C_1 — пряму, перпендикулярну до BC, і через середину C_1A_1 — пряму, перпендикулярно до CA. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Очевидно, що $\Delta A_1B_1C_1$ гострокутний, оскільки його кути задовольняють рівності $\angle A_1=\frac{1}{2}(\angle C+\angle B)$, $\angle B_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$, $\angle C_1=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$. Покажемо, що проведені прямі є серединними перпендикулярами до трикутника, який є ортоцентричним до $\Delta A_1B_1C_1$ (рис.4).

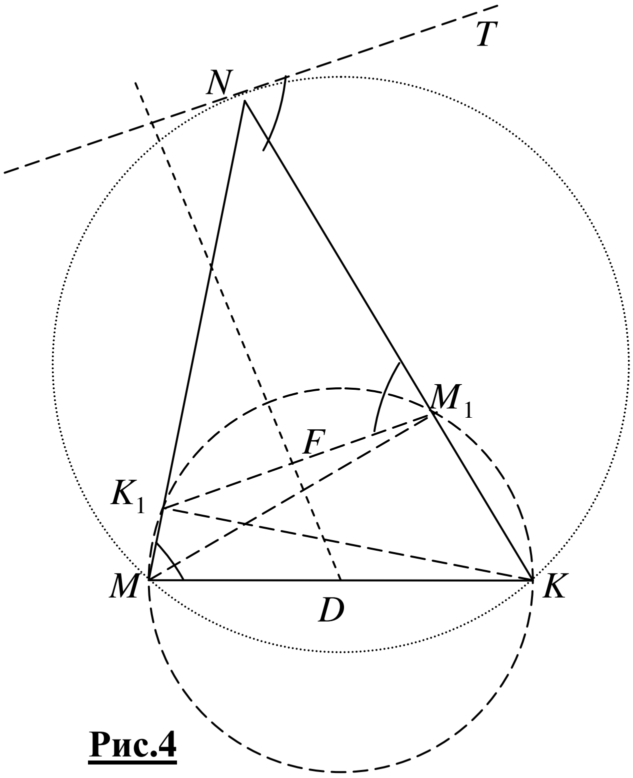


Рис.4

Розглянемо гострокутний ΔKMN, MM_1 та KK_1 — його висоти, D — середина MK, F — середина M_1K_1. TN — дотична до описаного навколо ΔMNK кола. Коло з діаметром MK — описане навколо чотирикутника MKM_1K_1. Тоді $\angle K_1M_1N=\angle NMK$, але $\angle NMK=\angle KNT$, тому $TN \parallel M_1K_1$. Звідки серединний перпендикуляр до M_1K_1 проходить через точку D. Це й доводить наведене твердження.

Інше розв'язання. Доведемо, що справджується більш загальне твердження:
Нехай O — точка всередині ΔABC, A_1, B_1 та C_1 — основи перпендикулярів, що опущені з точки O на прямі BC, CA та AB ΔABC відповідно. Точки A_2, B_2 та C_2 — середини відрізків B_1C_1, C_1A_1 та A_1B_1 відповідно. A_3, B_3 та C_3 — основи перпендикулярів, що опущені з точок A_2, B_2 та C_2 на відповідні прямі BC, CA та AB. Довести, що прямі A_2A_3, B_2B_3 та C_2C_3 перетинаються в одній точці.

Скористаємо для доведення відомою лемою.
Лема Карно. Перпендикуляри в точках A_3, B_3 та C_3, що належать прямим BC, CA та AB ΔABC відповідно перетинаються в одній точці тоді і тільки тоді, коли справджується рівність: $BA_3^2-CA_3^2+CB_3^2-AB_3^2+AC_3^2-BC_3^2=0$.

З формули медіани для ΔBB_1C_1 та ΔCB_1C_1 і теореми Піфагора маємо: $BA_3^2 - CA_3^2 =$
$= BA_2^2 - CA_2^2 = \frac{1}{4}(2BC_1^2 + 2BB_1^2 - B_1C_1^2 - 2CB_1^2 - 2CC_1^2 + B_1C_1^2) =$ (рис.5)
$= \frac{1}{2}(BC_1^2 + BB_1^2 - CB_1^2 - CC_1^2)$. Випишемо аналогічні дві рівності і усі їх додамо:

$CB_3^2 - AB_3^2 = \frac{1}{2}(CA_1^2 + CC_1^2 - AC_1^2 - AA_1^2)$,

$AC_3^2 - BC_3^2 = \frac{1}{2}(AB_1^2 + AA_1^2 - BA_1^2 - BB_1^2)$.

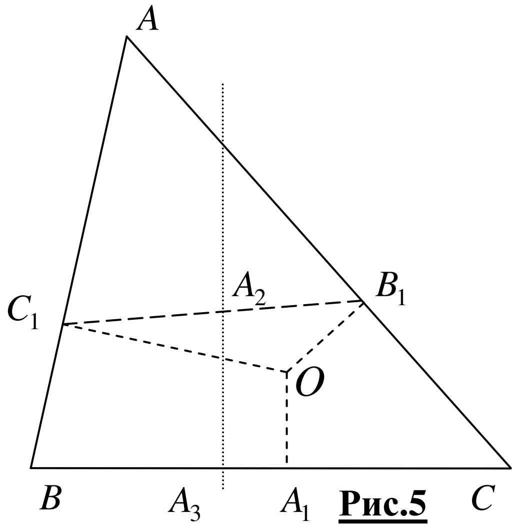


Рис.5

$BA_3^2 - CA_3^2 + CB_3^2 - AB_3^2 + AC_3^2 - BC_3^2 =$
$= \frac{1}{2}(BC_1^2 + BB_1^2 - CB_1^2 - CC_1^2 + CA_1^2 +$
$+ CC_1^2 - AC_1^2 - AA_1^2 + AB_1^2 +$
$+ AA_1^2 - BA_1^2 - BB_1^2) = \frac{1}{2}(BC_1^2 - CB_1^2 +$
$+ CA_1^2 - AC_1^2 + AB_1^2 - BA_1^2)$. (*)

Враховуючи, що $AO^2 + BO^2 + CO^2 =$
$= AC_1^2 + OC_1^2 + BA_1^2 + OA_1^2 + CB_1^2 + OB_1^2 =$
$= AB_1^2 + OB_1^2 + BC_1^2 + OC_1^2 + CA_1^2 + OA_1^2 =$
$AC_1^2 + BA_1^2 + CB_1^2 = AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2$, якщо це тепер використати у співвідношенні (*), то ми одержимо, що $BA_3^2 - CA_3^2 + CB_3^2 - AB_3^2 + AC_3^2 - BC_3^2 = 0$, звідки, використовуючи лему Карно, одержимо потрібне. Легко зрозуміти, що початкова задача — це випадок, коли точка O — інцентр.

10 клас

10.1. (*Анікушин Андрій*) Відомо, що $|x+y|+|x-y|=1$. Знайдіть найменше та найбільше значення виразу $x^2 - 6x + y^2 - 6y$.

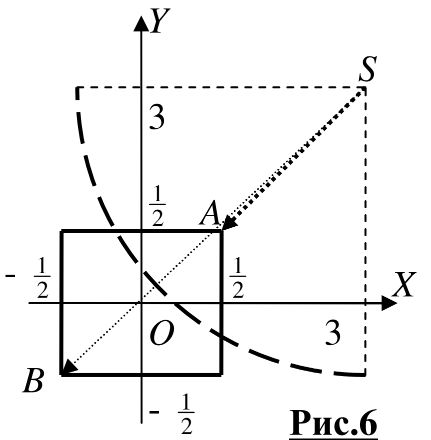


Рис.6

Відповідь: $\min(x^2 - 6x + y^2 - 6y) = -\frac{11}{2}$,

$\max(x^2 - 6x + y^2 - 6y) = \frac{13}{2}$.

Розв'язання. Вираз $f = x^2 - 6x + y^2 - 6y =$ $= (x-3)^2 + (y-3)^2 - 18 = R^2 - 18$ (рис.6) буде максимальним (мінімальним) одночасно з максимумом (мінімумом) виразу $R^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2$, а це є рівняння кола з центром в точці $(3,3)$ та радіусом R. Графіком рівняння $|x+y|+|x-y|=1$ є квадрат, що утворений прямими $x = \pm\frac{1}{2}$, $y = \pm\frac{1}{2}$. Таким чином маємо картину, що зображена на рис.6.

Отже максимальний радіус серед кіл, що перетинається з квадратом, буде мати коло, яке проходить через точку $B(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, а мінімальний — через точку $A(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Таким чином маємо для максимуму $R^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{2}$, а тому $f_{\max} = \frac{49}{2} - 18 = \frac{13}{2}$, а для мінімуму — $R^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$ і $f_{\min} = \frac{25}{2} - 18 = -\frac{11}{2}$.

10.2. (*Жидков Сергій*) На продовженні сторони BC паралелограма $ABCD$ за точку C вибрано таку точку K, що трикутник ΔCDK є рівнобедреним з основою , а на продовженні сторони DC за точку C вибрано таку точку L, що рівнобедреним з основою CL є трикутник CBL. Бісектриси кутів $\angle LBC$ та $\angle CDK$ перетинаються в точці Q. Знайдіть радіус описаного навколо трикутника ALK кола, якщо $\angle BQD = \alpha$ і $KL = a$.

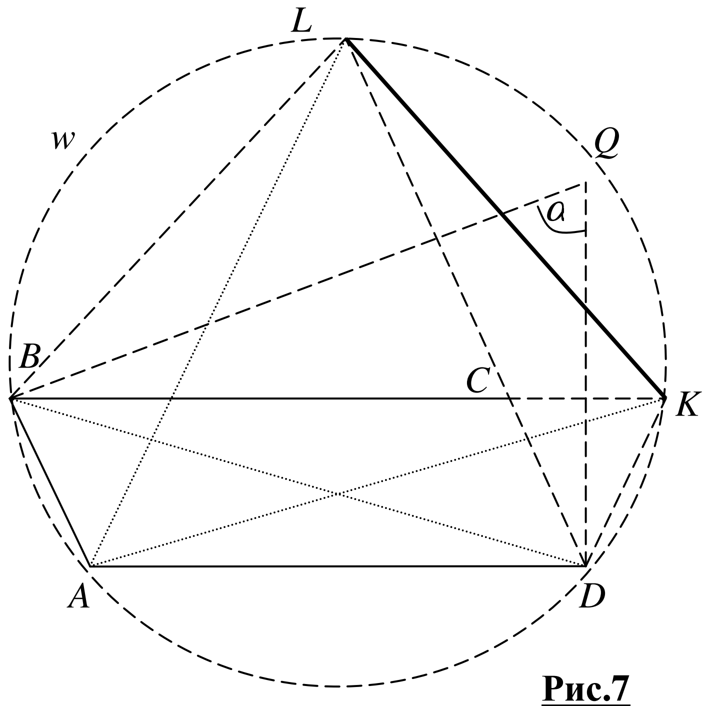


Рис.7

Відповідь: $\frac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Розв'язання. Оскільки трапеція $ABKD$ рівнобічна, то точки A, B, K, D лежать на одному колі, аналогічно на одному колі також лежать і точки B, L, D, A, таким чином усі п'ять точок B, L, D, A, K лежать на описаному навколо ΔALK колі w. Діагоналі трапецій $ABKD$ і $BLDA$ рівні, оскільки одна з них спільна, тому $AL = AK$ і ΔALK — рівнобедрений.

Оскільки BQ бісектриса рівнобедреного ΔLBC (рис.7), то $BQ \perp LC$ і $LC \parallel AB$, тому $BQ \perp AB$ і $\angle QBA = 90^\circ$, аналогічно $\angle QDA = 90^\circ$, звідки точки Q, B, D, A лежать на одному колі, і це коло w. Оскільки кути $\angle BQD$ та $\angle ALK$ спираються на однакові хорди $BD = AK$, то $\angle ALK = \alpha$ і $\angle LAK = 180^\circ - 2\alpha$. За теоремою синусів для ΔALK маємо: $R = \frac{LK}{2\sin\angle LAK} = \frac{a}{2\sin 2\alpha}$.

10.3. (Крижанівський Олег) Розглянемо усі можливі послідовності $a_1, a_2, \ldots, a_{2008}$ цілих невід'ємних чисел, такі, що $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{2008}$, та $a_k \le (k-1)$ для усіх k від 1 до 2008. Доведіть, що таких послідовностей:

а) більше, ніж 2^{2007}; ***б)*** більше, ніж 2^{2008}.

Розв'язання. ***а)*** Спочатку побудуємо різні 2^{2007} різних послідовностей, які задовольняють умови задачі. В усіх послідовностях покладемо $a_1 = 0$. Для кожної наступного елементу послідовності покладемо його або „на 0 більше", або „на 1 більше", ніж попередній. Таким чином ми маємо 2^{2007} різних послідовностей. ММІ легко показати, що у кожної з цих послідовностей $a_k \le k-1$. Для доведення строгої нерівності достатньо навести приклад принаймні однієї послідовності. Яка не входить у наведений перелік 2^{2007} послідовностей, але задовольняє умови задачі. Наприклад, це може бути така послідовність: $(0,0,2,2,\ldots,2)$.

б) Назвемо ***гарною*** довільну неспадну послідовність цілих невід'ємних чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, яка задовольняє умову $a_k \le (k-1)$, $k = \overline{1,n}$. Зауважимо, що довільна гарна послідовність довжини $(n+1)$ можна одержати з гарної послідовності довжини n, якщо додати член a_{n+1}, який задовольняє таку подвійну нерівність: $a_n \le a_{n+1} \le n$. Так само і навпаки, достатньо відкинути останній член у послідовності довжини $(n+1)$ і ми одержимо гарну послідовність довжини n.

Позначимо кількість гарних послідовностей довжини n через x_n. Очевидно, що можна побудувати щонайменше дві різні гарні послідовності довжини $(n+1)$, якщо покласти очевидні припустимі можливості для a_{n+1}: це a_n чи (a_n+1). Аналогічно, якщо продовжити міркування легко одержати такі нерівності: $x_{n+m} \geq 2^m x_n$.

Тепер достатньо обчислити кількість послідовностей при малих значеннях n. Очевидно, що $x_1 = 1$, оскільки так послідовність лише одна: (0). Так само просто одержати, що $x_2 = 2$, бо гарними є такі послідовності: $(0{,}0)$ та $(0{,}1)$. Тому вже маємо оцінку $x_{2008} \geq 2^{2006} x_2 = 2^{2007}$, але цього поки що недостатньо. Для одержання послідовностей довжини 3 бачимо, що можна додати третім елементом до $(0{,}0)$ одне з чисел $0{,}1{,}2$, а до $(0{,}1)$ — $0{,}1$, тобто $x_3 = 5$ і $x_{2008} \geq 2^{2005} x_3 = 5 \cdot 2^{2005} > 2^{2007}$. Далі просто треба продовжити обчислення кількості гарних послідовностей при малих n: $(0{,}0{,}0) - 0{,}1{,}2{,}3$, $(0{,}0{,}1), (0{,}1{,}1) - 1{,}2{,}3$, $(0{,}0{,}2), (0{,}1{,}2) - 2{,}3$, тобто усього 14 різних гарних послідовностей, тому $x_4 = 14$ і $x_{2008} \geq 2^{2004} x_4 = 14 \cdot 2^{2004} > 5 \cdot 2^{2005}$.

З цих гарних послідовностей одна закінчується на 0, тому дописати можна $0{,}1{,}2{,}3{,}4$, три — на 1, можна дописати $1{,}2{,}3{,}4$, п'ять — на 2, можна дописати $2{,}3{,}4$, п'ять — на 3, можна дописати $3{,}4$. Тому усього — $5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 42$, звідки вже маємо доведену першу оцінку: $x_{2008} \geq 2^{2003} x_5 = 42 \cdot 2^{2003} > 32 \cdot 2^{2003} = 2^{2008}$.

10.4. (<u>*Рубльов Богдан*</u>) Розглянемо усі зростаючі геометричні прогресії. Серед них виберемо такі, які мають максимальну кількість M спільних елементів з множиною $A = \{1,2,3,...,2008\}$. Знайдіть значення M.

<u>Відповідь</u>: 11.

<u>Розв'язання</u>. Нехай одна з прогресій $\{a_n\}$, для якої досягається шуканий максимум M має нульовий член a_0 і знаменник $q_0 > 1$. Вона має перетин з множиною A, нехай n — найменше число з A, яке належить прогресії. Тоді можна визначити нову прогресію з першим членом $b_0 = n$ та тим самим знаменником q_0. У неї стільки ж членів, які належать множині A, тому її можна розглянути в якості початкової. Нехай наступний член з множини A, який міститься в прогресії дорівнює m, тобто в новій прогресії $b_0 = n$, $b_k = b_0 q_0^k = n q_0^k = m \Rightarrow q_0^k = \frac{m}{n} = \frac{u}{v} \in Q$, де $\frac{u}{v}$ — нескоротній дріб і $n \frac{u}{v} = m$.

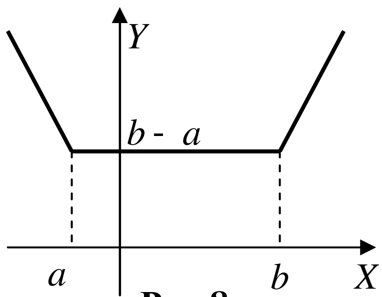
Покажемо, що при $1 \leq i < k$ $q_0^i \notin Q$. Методом від супротивного, нехай $q_0^i = \frac{s}{t}$ — також нескоротній дріб. Тоді $\left(\frac{u}{v}\right)^i = q_0^{ki} = \left(\frac{s}{t}\right)^k$. Тоді $u^i t^k = s^k v^i$, звідки зрозуміло, що $u^i = s^k$ і $v^i = t^k$. Дійсно, $(u,v) = 1 \Rightarrow t^k \vdots v^i$ і навпаки $v^i \vdots t^k$. Оскільки $i < k$, то $v > t$ і $b_0 = n \vdots v \Rightarrow b_0 = n \vdots t$, а тому $b_i = b_0 q_0^i = n \frac{s}{t} \in N$, що суперечить умові, що першим натуральним числом після n буде $b_k = b_0 q_0^k = n \frac{u}{v} = m$.

З доведеного випливає, що раціональними членами обраної геометричної прогресії можуть бути лише члени такого набору: b_0, $b_0 q_0^k$, $b_0 q_0^{2k}$,..., тому можемо вибрати $q = q_0^k \in Q$ і розглянути вже таку прогресію (b_0, q) з цілим першим членом $b_0 = n$ та раціональним знаменником q, де $q = \frac{p}{r}$ — нескоротній дріб.

Серед усіх прогресій з цілими знаменниками найбільший перетин з A очевидно має прогресія $(1,2)$, яка має 11 спільних точок — це степені двійки: 1, 2, 4,..., 1024. припустимо, що існує прогресія з раціональним показником, яка має більше спільних цілих точок., нехай це буде прогресія $\left(n,\frac{p}{r}\right)$. Зрозуміло, що якщо буде цілим $c_k = n\left(\frac{p}{r}\right)^k$, тобто $n \,\vdots\, r^k$, то цілими будуть і усі попередні c_i, $i=\overline{0,k}$. Таким чином, якщо прогресія буде мати принаймні 12 спільних точок, то у неї цілим повинно бути $c_{12} = n\left(\frac{p}{r}\right)^{11}$, але це означає, що $n \,\vdots\, r^{11}$. Оскільки $\frac{p}{r} \notin N$, то $r \geq 2$, тому $r^{11} \geq 2048$ і $n \geq 2048$ — одержана суперечність завершує доведення твердження, що більше ніж 11 спільних членів не може мати зростаюча геометрична прогресія з множиною A.

11 клас

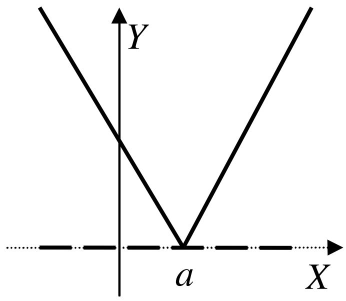
11.1. (<u>*Маліцький Юрій*</u>) При яких значеннях параметра a рівняння $|x-\frac{1}{2}|+|x-\sin a|=\cos 3a$ має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.



<u>Рис.8</u>

<u>Відповідь</u>: $x=\frac{1}{2}$ при $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

<u>Розв'язання</u>. Графік функції $y=|x-a|+|x-b|$ при $b>a$ зображено на <u>рис.8</u>. Зрозуміло, що рівняння $|x-a|+|x-b|=c$ може мати єдиний розв'язок лише при умові $a=b$ і $c=0$ (<u>рис.9</u>).



<u>Рис.9</u>

Таким чином для нашого рівняння повинні виконуватись одночасно такі умови $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{1}{2}\\ \cos 3\alpha=0\end{cases} = \begin{cases}\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\\ \alpha=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\pi k\end{cases}$, $n,k\in Z$. Спільним розв'язком цієї системи будуть значення $\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$ і $x=\frac{1}{2}$.

11.2. (<u>Рубльов Б., Торба С.</u>) Знайдіть усі функції $f: R \to R$, такі що для будь-яких дійсних x та y виконується умова:

$$f\left(f(y)+2+x\right)+f\left(f(y)-x\right)=yf(y)(x+1).$$

<u>Відповідь</u>: $f(x)=0$.

<u>Розв'язання</u>. Зробимо підстановку $x=-2-t$, де t — довільне дійсне число, тоді одержимо, що $f\left(f(y)-t\right)+f\left(f(y)+2+t\right)=-yf(y)(t+1)$. Бачимо, що ліва частина не змінилася, а перед правою з'явився знак мінус. Отже, при всіх y та t повинно виконуватись $yf(y)(t+1)=0$, звідки $f(y)=0$ при всіх $y\neq 0$.

Зробимо підстановку $x=-2$, $y=1$. Отримаємо: $f(0)+f(2)=0$, оскільки $f(2)=0$, то й $f(0)=0$. Очевидно, що функція тотожній нуль задовольняє умову.

11.3. (<u>*Шепельська Варвара*</u>) Дано трикутник ABC всередині якого існує така точка O, що $\angle BOC=90°$ та $\angle BAO=\angle BCO$. Точки M і N — середини сторін AC і BC відповідно. Доведіть, що кут $\angle OMN$ — прямий.

Розв'язання. Розглянемо сторону BC, побудуємо ній коло w як на діаметрі. За умовою задачі точка O повинна знаходитись на цьому колі. Побудуємо коло w_1 рівне колу w , яке перетинається з колом w по відрізку BO. За умовою про рівність кутів, точка A повинна лежати на колі w_1, зрозуміло на якій саме дузі цього кола (рис.10). Проведемо пряму CO до перетину з колом w_1 в точці D. Тоді трикутники BOC і BOD рівні прямокутні трикутники. Оскільки BC — діаметр кола w , то BD — діаметр кола w_1

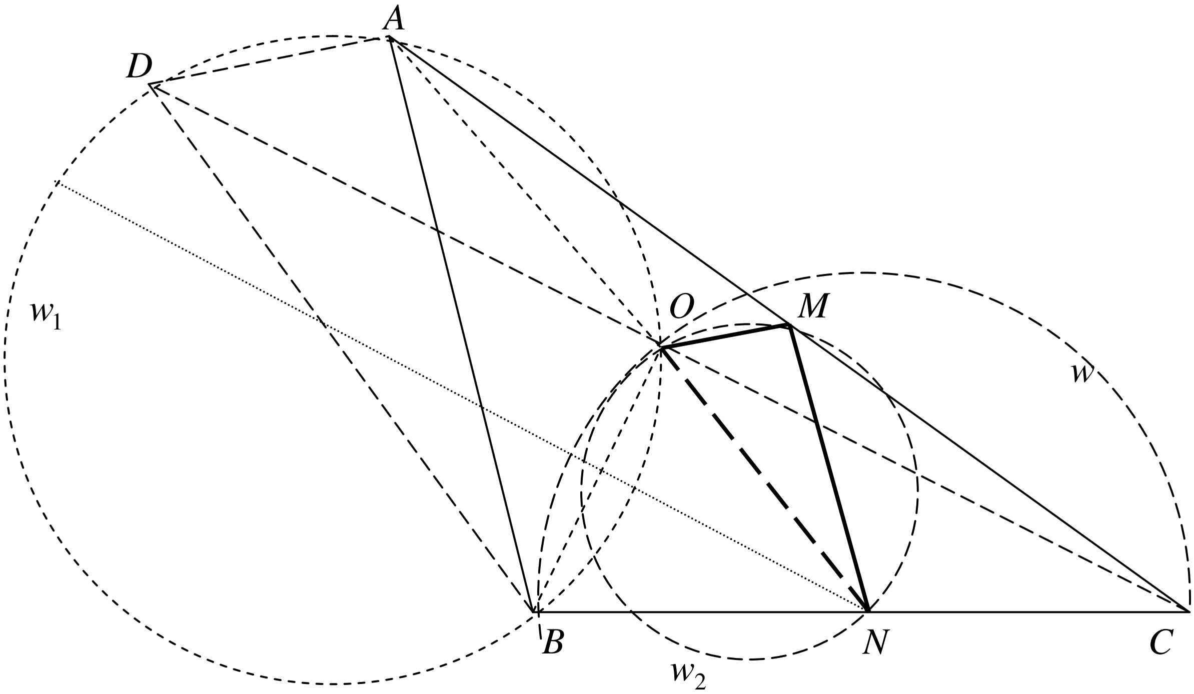


Рис.10

тому кут $\angle BAD$ — прямий. Розглянемо гомотетію $H_C^{0,5}$ і позначимо коло $w_2 = H_C^{0,5}(w_1)$. Очевидно, що $M = H_C^{0,5}(A)$, $N = H_C^{0,5}(B)$, $O = H_C^{0,5}(D)$. Оскільки коло w_1 проходить через точки A, B, D, то коло w проходить через точки M, N, O і ON — діаметр цього кола. Тому $\angle OMN$ — прямий.

11.4. (Петровський Дмитро) Знайти кількість розв'язків у натуральних числах рівняння

$$[a^2,b^2]+[b^2,c^2]+[c^2,a^2]=(a^2,b^2)(b^2,c^2)(c^2,a^2),$$

де через $[m,n]$ та (m,n) позначені, відповідно, НСК та НСД натуральних чисел m та n

Відповідь: розв'язків нескінченно багато.

Розв'язання. Нехай $a = px$, $b = py$, $c = pz$, де p, x, y, z — попарно взаємно прості числа. Тоді рівняння набуває такого вигляду: $(pxy)^2 + (pxz)^2 + (pyz)^2 = (p^2)^3$ $\Leftrightarrow$ $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = p^4$ $\Leftrightarrow$ $x^2(y^2 + z^2) = (p^2 - yz)(p^2 + yz)$. Якщо $p^2 = y^2 + yz + z^2$, то $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 + 2yz + z^2)(y^2 + z^2)$ = $x = y + z$. За таких умов маємо розв'язком таку трійку $\big(p(y + z), py, pz\big)$.

Залишається показати, що існує нескінченно багато трійок натуральних чисел (p, y, z) для яких справджується рівність: $p^2 = y^2 + yz + z^2$. Позначимо $u = \frac{y}{p}$, $v = \frac{z}{p}$, тобто треба показати, що рівняння $u^2 + uv + v^2 = 1$ має нескінченно багато розв'язків в раціональних координатах. Одна точка є — це $(1,0)$. Виберемо раціональне k, тоді пряма $v = k(u - 1)$ перетинає криву (еліпс) $u^2 + uv + v^2 = 1$ ще в одній точці окрім $(1,0)$, яка за теоремою Вієта є раціональною.

На виконання завдання відводиться 4 години

Кожна задача оцінюється в 7 балів

Користування будь-якими електронними засобами забороняється

м. Дніпропетровськ
25 березня 2008 року

Результати, умови, перебіг подій олімпіади можна буде знайти в Інтернеті за адресою:
www.matholymp.kiev.ua або **www.matholymp.org.ua**