Міністерство освіти і науки України
Інститут інноваційних технологій та змісту освіти

XLVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

<u>*Другий день*</u>

8 клас

8.5. (<u>*Лішунов Віталій*</u>) Відомо, що при деякому натуральному n десятковий запис числа $n^2+2008n$ закінчується цифрою 4. Знайдіть цифру десятків цього числа.

<u>Відповідь</u>: 8.
<u>Розв'язання</u>. Зрозуміло, що на відповідь не впливає число $2000n$, тому шукані цифри у чисел $A=n^2+2008n$ та $B=n^2+8n^2$ співпадають. Оскільки число $(B+16)$, з одного боку дорівнює $(n+4)^2$, тобто є квадратом натурального числа, а з іншого закінчується на 0, то це число повинно закінчуватись на 00. Таким чином $B=\overline{X00}-16=\overline{Y84}$, де X,Y деякі натуральні числа. Тому останні дві цифри числа це — 84.

8.6. (<u>*Рубльов Б., Торба С.*</u>) Є п'ять купок, в яких лежить 42, 70, 105, 462 та 2009 камінців. Дозволяється проводити такі операції: замість двох купок, в яких було a і b камінців утворити

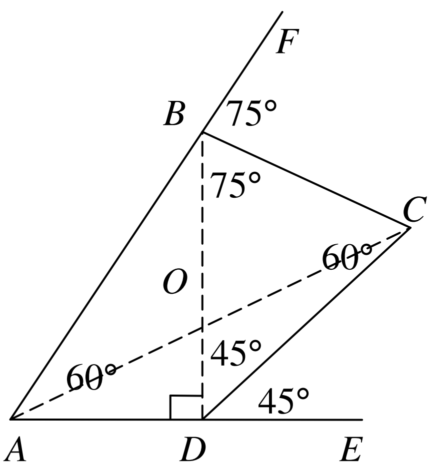
- дві купки, які містять a і $(a+b)$ камінців;
- дві купки, які містять a і $|a-b|$ камінців.

Також можна вибрати k різних купок, загальна кількість камінців в яких дорівнює nk, де n — деяке натуральне число, та замість них утворити

- k купок по n камінців в кожній.

Чи можна за скінченну кількість кроків одержати 5 купок, в кожній з яких буде по:
а) 2008 камінців; ***б)*** 2009 камінців?

<u>Відповідь</u>: ***а)*** не можна; ***б)*** можна.
<u>Розв'язання</u>. ***а)*** Легко побачити, що НСД усіх чисел 42, 70, 105, 462 та 2009 — це число 7. Будь-яка з наведених операцій залишає умову кратності НСД кількості камінців у купках на 7. Тому відповідь на запитання пункту негативна, оскільки НСД дорівнює 2008 і не ділиться на 7.
б) Відповідь на запитання цього пункту позитивна, наведемо одну із схем одержання потрібного набору. (42,***70***,***105***,462,2009) – (***42***,***35***,105,462,2009) – (7,35,105,462,2009). Далі ми для купки з 7 камінців застосовуємо операцію збільшення іншої купки на 7 камінців: – (7,***35+7*1061***,105,462,2009). Після цього для одержаних 5 купок, які в сумі містять 10045 камінців ми застосуємо операцію поділення на рівні купки, і одержимо потрібне.



<u>Рис.1</u>

8.7. (<u>*Крюкова Галина*</u>) В чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Відомо, що діагональ BD перпендикулярна стороні AD, $\angle BAD=\angle BCD=60°$, $\angle ADC=135°$. Знайдіть відношення $DO:OB$.

<u>Відповідь</u>: $1:2$.

Розв'язання. З умов задачі легко знайти такі кути (рис.1): $\angle ABD = 30°$, $\angle BDC = 45°$, $\angle DBC = 75°$. Проведемо промені AD та AB. Тоді $\angle EDC = 45°$, $\angle FBC = 75°$, тому BC — бісектриса $\angle DBF$, а DC — бісектриса $\angle BDE$, звідки AC — бісектриса $\angle BAD$, що легко доводиться з ГМТ бісектриси. Отже $\angle BAO = 30°$ і ΔAOB — рівнобедрений, тому $AO = BO$, а $DO = \frac{1}{2} AO$ з прямокутного трикутника ΔADO з кутом $30°$. Звідки знаходимо $\frac{DO}{OB} = \frac{1}{2}$.

8.8. (*Крижанівський Олег*) У Петра є декілька однакових білих квадратиків розміром 4×4. Кожну клітинку 1×1 кожного квадратика він фарбує у червоний або синій колір у такий спосіб, щоб серед усіх стовпчиків усіх квадратиків не було двох однаково пофарбованих, і серед усіх рядків усіх квадратиків не було двох однаково пофарбованих. Повертати та перегортати квадратики не можна. Яку найбільшу кількість квадратиків таким чином Петрик може зафарбувати?

Відповідь: 4.

0001	**1110**	**0110**	**1001**
0010	**1101**	**0011**	**1100**
0100	**1011**	**0101**	**1010**
1000	**0111**	**0000**	**1111**

Розв'язання. Усього є $2^4 = 16$ різним чином пофарбованих стовпчиків. Але кожний квадрат містить рівно 4 стовпчики, тому усього різних квадратів не може бути більшим за $\frac{2^4}{4} = 4$. Доведемо, що рівно таку кількість ми можемо зафарбувати. В таблиці наведено відповідний приклад. Досить перевірити виконання умови лише для стовпчиків, а для рядків все витікає з симетрії відносно діагоналі.

9 клас

9.5. (*Лішунов Віталій*) Відомо, що при деякому натуральному n десятковий запис числа $n^3 + 2009n^2 + 27n$ закінчується на цифрою 3. Знайдіть цифри сотень та десятків цього числа.

Відповідь: 97.

Розв'язання. Зрозуміло, що на відповідь не впливає число $2000n$, тому шукані цифри у чисел $A = n^3 + 2009n^2 + 27n$ та $B = n^3 + 9n^2 + 27n$ співпадають. Оскільки число $(B + 27)$ з одного боку дорівнює $(n+3)^3$, тобто є кубом натурального числа, а з іншого закінчується на 0, то це число повинно закінчуватись на 000. Таким чином $B = \overline{X000} - 27 = \overline{Y973}$, де X, Y деякі натуральні числа. Тому останні три цифри це 073.

9.6. (Бачеріков Олександр) На дошці записано n натуральних чисел. До них можна дописувати лише натуральні числа вигляду $\frac{a+b}{a-b}$, де a і b — раніше записані числа. Виявилось, що, діючи у такий спосіб, на дошці можна отримати будь-яке натуральне. Знайдіть найменше значення n та з'ясуйте, які числа були записані на дошці спочатку (розгляньте всі випадки).

Відповідь: $\{1,2\}$ або $\{1,3\}$.

Розв'язання. Оскільки $(a+b) > (a-b)$, то число 1 такими операціями одержати неможливо. Тому воно повинно бути записане на дошці. Одного числа недостатньо. Покажемо, що вистачить двох чисел. Означимо друге число через x. Число $\frac{x+1}{x-1}$ єдине, яке ми можемо одержати на першому кроці. Оскільки воно натуральне, то $\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow (x+1) \geq 2x-2$ або $x \leq 3$. Таким чином цим другим числом може бути або 2, або 3, і ми маємо два можливих набори: $\{1,2\}$ та $\{1,3\}$.

Доведемо, що вони обидва задовольняють умову. Оскільки $\frac{2+1}{2-1}=3$ і $\frac{3+1}{3-1}=2$, то після першого кроку ми в обох випадках приходимо до набору $\{1,2,3\}$, і залишається показати, що з цієї трійки можна одержати будь-яке натуральне число, більше за 3.

Нехай ми вже одержали набір $\{1,2,3,...,(2k+1)\}$. Покажемо, як одержати наступні два числа. З чисел $(k+1),(k+2)$ одержимо число $\frac{(k+2)+(k+1)}{(k+2)-(k+1)}=2k+3$, далі з чисел $(2k+3),(2k+1)$ одержимо $\frac{(2k+3)+(2k+1)}{(2k+3)-(2k+1)}=2k+2$, звідки й випливає потрібне.

9.7. (Примак Андрій) У гострокутному різносторонньому трикутнику ABC проведено висоту BB_1. На стороні BC вибрано таку точку D, що $\angle BAD=\angle CBB_1$. Відрізки AD і BB_1 перетинаються в точці F. Через точку B, перпендикулярно до сторони AB провели пряму l, яка перетинається з прямою CF в точці K. Доведіть, що пряма DK перетинає відрізок BF у його середині.

Розв'язання. Нехай точка N — це перетин прямої AD з описаним навколо ΔABC колом. Тоді $\angle BCN=\angle BAN=\angle CBB_1$. Звідси $BB_1 \parallel CN$ (рис.2), тому $\angle ACN=90^\circ$ = AN — діаметр. Тому $\angle NBA=90^\circ$, звідки випливає, що N,B,K лежать на одній прямій. Оскільки D — точка перетну діагоналей трапеції $CFBN$, а K — точка перетину продовжень її бічних сторін, то далі все випливає з відомих властивостей трапеції.

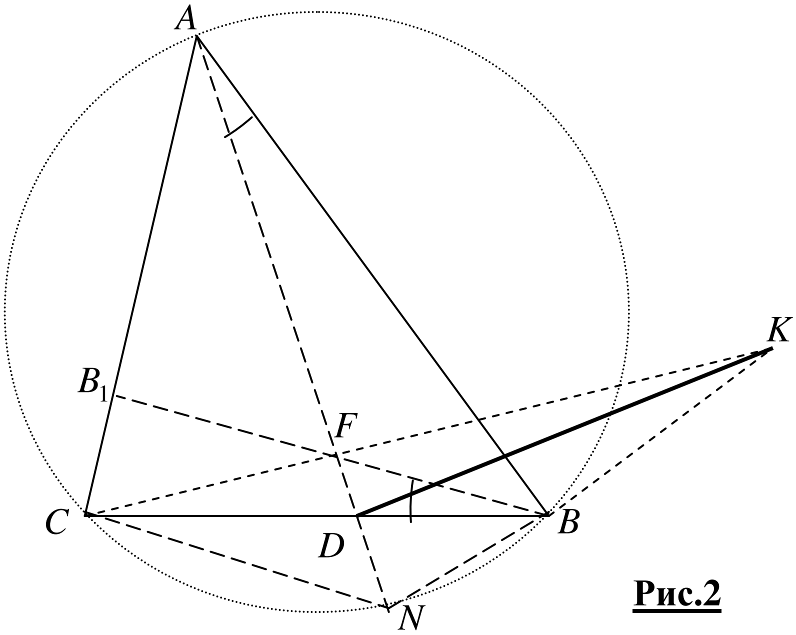


Рис.2

9.8. (Крижанівський Олег) У Петрика є декілька однакових білих квадратиків розміром 4×4 клітинки. Кожну клітинку 1×1 кожного квадратика він фарбує у червоний або синій колір у такий спосіб, щоб у будь-яких двох квадратиків відрізнялися перші, другі, треті й четверті стовпчики відповідно, а також перші, другі, треті й четверті рядки відповідно. Повертати та перегортати квадратики не можна. Яку найбільшу кількість квадратиків таким чином Петрик може зафарбувати?

ABCD
BCDA
CDAB
DABC

Відповідь: 16.

Розв'язання. Оскільки кожні два квадрати відрізняються в кожному рядку та кожному стовпчику, то вони вже відрізняються вже у першому стовпчику. Існує усього $2^4=16$ по різному пофарбованих стовпчиків, тому усього Петро не зможе пофарбувати більше ніж стільки різних квадратів, що задовольняють умови задачі.

Покажемо, що це число і є відповіддю. Він бере 16 білих квадратиків та фарбує у них перші стовпчики усіма можливими різними варіантами. Одержані квадрати вже відрізняються у перших стовпчиках. Покажемо, як він буде фарбувати далі з виконанням умов задачі. Він буде використовувати циклічно-діагональний шаблон, який можна описати таким чином. Для кожного білого квадрату він (умовно) відрізає перший стовпчик, переставляє його верхню клітину донизу та накладає його на другий стовпчик для його фарбування. Аналогічно він одержує третій стовпчик з другого тощо. Відповідний приклад наведено нижче:

Розглянемо тепер два різних квадратики $X \neq Y$. За побудовою вони відрізняються у першому стовпчику. Нехай вони відрізняються у клітині з порядковим номером $(4-j)$ знизу. Якщо вони відрізняються в декількох клітинах, то виберемо довільну. Оді їх другі стовпчики відрізняються у клітині з номером $(5-j)$ і т.д. Таким чином усі стовпчики різні, але клітина відмінності знаходиться в певному рядку, вона відрізняється з відповідним іншим квадратом. Тому, вона так само рухається вздовж рядків, як і вздовж стовпчиків, що задає відмінність у кожному рядку.

10 клас

10.5. Дивись задачу ***9.5.***

10.6. (Коротков Андрій) Для клітчатої дошки розміром 10×10 розглядаються усі можливі розфарбування 10 його клітинок, для яких у кожному рядку і кожному стовпчику знаходиться рівно одна пофарбована клітинка. Для кожного розфарбування знаходиться прямокутник найбільшої площі зі сторонами, що йдуть по лініям сітки, і який не містить жодної пофарбованої клітинки. Яке найбільше значення може приймати площа цього прямокутника?

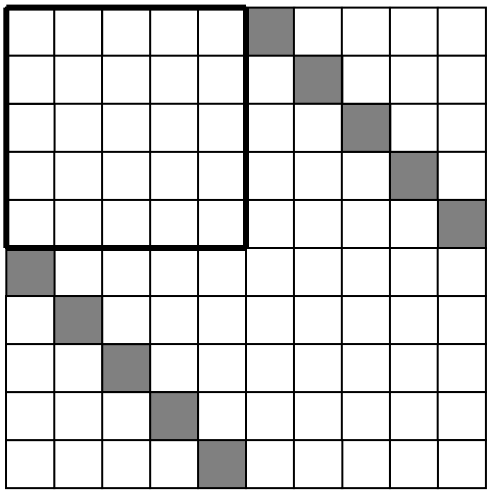


Рис.3

Відповідь: 25.

Розв'язання. Надалі розглядаємо прямокутники зі сторонами, що йдуть вздовж ліній сітки.

Нехай на дошці знаходиться прямокутник розміру $A\times B$ без помічених клітинок (A — ширина, B — висота). У A стовпчиках, де лежить прямокутник, має знаходитися A помічених клітинок (за умовою). З іншого боку, ці A клітинок будуть знаходитися у рядках, відмінних від тих B рядків, що містять даний прямокутник. Залишається $(10-B)$ рядків, і маємо необхідною умовою $10-B\geq A$ (інакше A помічених клітинок неможливо буде розмістити у $(10-B)$ рядках по одній у кожному). $A+B\leq 10$ (те ж саме одержали б, якщо би розглядали B рядків). За таких умов максимальну площу буде мати прямокутник 5×5 (площа $A(10-A)\leq\left(\frac{A+10-A}{2}\right)^2=25$ за нерівністю Коші, або як парабола гілками вниз). Нескладно побудувати приклад (рис.3), де ця площа досягається.

10.7. (Петровський Д., Аникушин А., Рубльов Б.) Для довільних додатних чисел a, b, c, довести нерівність: $\frac{a^2}{bc(a^2+b^2)}+\frac{b^2}{ca(b^2+c^2)}+\frac{c^2}{ab(c^2+a^2)}\geq\frac{9}{2}$, якщо вони задовольняють умову:

а) $a^2+b^2+c^2=1$; ***б)*** $ab+bc+ca=1$.

Розв'язання. ***а)*** Перепишемо нерівність у вигляді: $A=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{9}{2}abc$. З нерівності між середніми маємо $A\geq3\cdot\sqrt[3]{\frac{(abc)^3}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}=3\cdot\frac{abc}{\sqrt[3]{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)}}\geq$

$$\geq\frac{3abc}{\frac{(1-a^2)+(1-b^2)+(1-c^2)}{3}}=\frac{9abc}{3-(a^2+b^2+c^2)}=\frac{9}{2}abc$$, що й треба було довести.

б) Розглянемо допоміжну нерівність: $\frac{a^3}{a^2+b^2}\geq a-\frac{b}{2}$, яка доводиться простими перетвореннями

$$2a^3 \ge (a^2+b^2)(2a-b) = 2a^3 + 2ab^2 - a^2b - b^3 \iff b(a-b)^2 \ge 0.$$

$$\frac{a^2}{bc(a^2+b^2)} + \frac{b^2}{ca(b^2+c^2)} + \frac{c^2}{ab(c^2+a^2)} = \frac{1}{abc}\left(\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2}\right) \ge \frac{1}{abc}\left(a - \frac{b}{2} + b - \frac{c}{2} + c - \frac{a}{2}\right) =$$

$= \frac{a+b+c}{2abc} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2abc} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}\cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2abc} \ge \frac{9}{2}$. Легко бачити, що пункт ***а)*** так само можна зробити цим шляхом.

10.8. (*Білокопитов Євген*) Нехай H — точка перетину висот гострокутного трикутника ABC, точки A_1, B_1, C_1 — середини сторін BC, CA і AB відповідно. Нехай A_2 та C_2 — такі точки, що $A_2A \perp AC$ і $A_2C_1 \perp AB$, $C_2C \perp AC$ і $C_2A_1 \perp BC$. Доведіть наступні твердження:

а) середина відрізка BH лежить на прямій A_2C_2;

б) нехай пряма BB_1 перетинає коло, описане навколо трикутника $A_1B_1C_1$, в точках B_1 і B_3, тоді точка B_3 лежить на прямій A_2C_2.

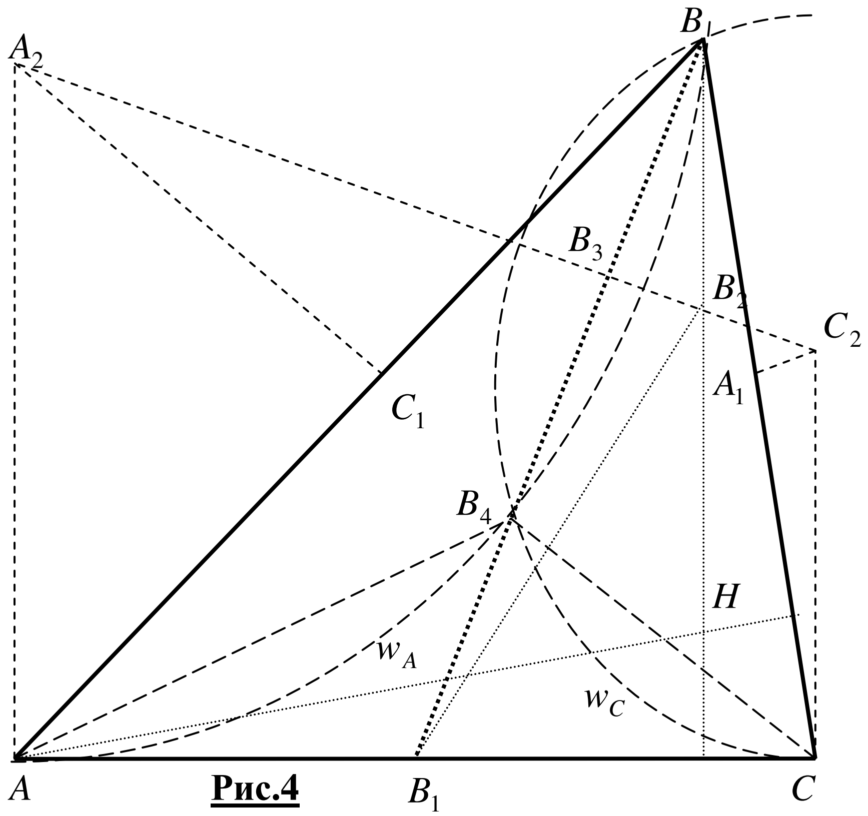


Рис.4

Розв'язання. Позначимо через H_2 середину відрізку BH. Нехай w_A, w_C — кола, з центрами в A_2, C_2, та радіусами A_2A і C_2C відповідно. Тоді вони дотикаються до прямої AC у відповідних кінцях відрізку AC та проходять через точу B, бо точки A_2, C_2 лежать на відповідних серединних перпендикулярах. При цьому степінь точки B_1 відносно цих кіл рівна, отже радикальна вісь цих кіл — пряма BB_1. Нехай B_4 — їх друга точка перетину. Тоді за теоремою про дотичну і хорду маємо $\angle B_4AC = \angle B_4BA$, $\angle B_4CA = \angle B_4BC$ = $\angle CB_4A =$ $= \pi - \angle B_4BA - \angle B_4BC = = \pi - \angle ABC = \angle AHC$, отже точки A, B_4, C, H лежать на одному колі. Гомотетія з центром в B і коефіцієнтом $\frac{1}{2}$ (рис.4) переводить описане навколо ΔAHC коло, що описане навколо $\Delta A_1B_2C_1$, а отже відрізок B_4H у відрізок B_3B_2 відповідно. При цьому B_1B_2 — діаметр останнього кола, тому $B_3B_2 \perp BB_1$, отже B_2 лежить на серединному перпендикулярі до BB_4, на якому також лежать точки A_2, C_2, як центри кіл, що проходять через B, B_4.

11 клас

11.5. (*Арман Андрій*) Послідовність $\{f_n\}$ задається наступним чином: $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ для довільного натурального n. Яка найбільша кількість членів послідовності $\{f_n\}$ може бути серед послідовних членів зростаючої арифметичної прогресі?

Відповідь: 3.

Розв'язання. Нехай перших два послідовних члени — це $f_l = a$, $f_m = a + d$. Оскільки $a > 0$, $d > 0$, то $f_{m+1} > f_m$, $f_{m+2} = f_{m+1} + f_m > 2a + 2d > a + 2d$, тому третім елементом може бути лише f_{m+1}. Тобто $f_{m+1} = a + 2d$. Зрозуміло, що наступний член прогресії вже не буде задовольняти умови, оскільки $f_{m+2} = 2a + 3d > a + 3d$. Ну а приклад трьох послідовних членів прогресії легко знайти: $1,2,3$, або $2,5,8$.

11.6. У країні є n міст. Компанія монополіст хоче установити повітряне сполучення між деякими містами. Уряд вимагає, щоб повітряне сполучення між містами задовольняло таким умовам: щоб з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого за один або декілька перельотів, а також з кожного міста виходила однакова кількість рейсів. Зауважимо, що рейсом між містами A та B вважають сукупність двох перельотів — з міста A в B та з міста B в A, а також між двома містами може існувати щонайбільше один рейс. Але компанія хоче зробити так, щоб можна було закрити якомога меншу кількість рейсів, і вже не з кожного міста можна було дістатися до будь-якого іншого. Яку найменшу кількість рейсів треба буде закрити компанії, якщо:

а) $n = 2008$; ***б)*** $n = 2007$?

Відповідь: ***а)*** 1; ***б)*** 2.

Розв'язання. ***а)*** Розіб'ємо усі міста на дві групи з 1003 та 1005 міст в кожній. В кожній з цих груп з'єднаємо усі міста за циклом, вийде степінь кожної вершини 2. Далі виділимо у кожній з компонент по одному місту та з'єднаємо їх рейсом „007“. Решту парну кількість міст у кожній групі з'єднаємо між собою додатковими діагоналями всередині групи таким чином, щоб степінь кожної вершини стала 3 (рис.5). Зрозуміло, що достатньо розірвати рейс „007“ і умови виконані. Таким чином для подібних конструкцій відповідь 1.

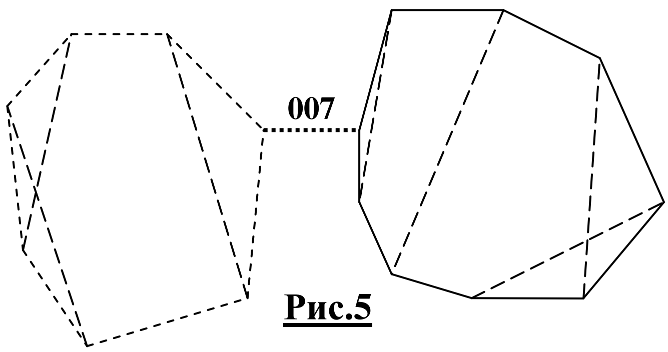


Рис.5

б) Позначимо цю мінімальну кількість через Δ. Очевидно, що $\Delta \,\vdots\, 2$, для цього достатньо з'єднати міста за будь-яким циклом, тобто з кожного міста виходить рівно 2 рейси. Тоді достатньо виключити будь-які два рейси і відразу система розпадеться на дві непов'язані між собою множини міст. Покажемо, що в цьому випадку $\Delta = 2$.

Від супротивного, припустимо, що $\Delta = 1$, тоді після вилучення цього рейсу все розпадається на 2 групи зв'язних проміж собою міст. В одній з цих двох груп буде $2m$ — парна кількість міст. Якщо до вилучення степінь кожної вершини була k, то усього в цій групі буде така кількість рейсів: $\frac{1}{2}\left((2m-1)k + (k-1)\right) = \frac{1}{2}(2mk-1)$ — не ціле число, що призводить до суперечності.

11.7. (Клурман Олексій) Доведіть, що для довільних невід'ємних дійсних чисел x, y, z, таких що $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, має місце нерівність $\frac{x}{\sqrt{x^2+y+z}} + \frac{y}{\sqrt{x+y^2+z}} + \frac{z}{\sqrt{x+y+z^2}} \le \sqrt{3}$.

Розв'язання. З нерівності Коші — Буняковського випливає, що достатньо довести таку нерівність: $\left(\frac{x}{x^2+y+z} + \frac{y}{y^2+z+x} + \frac{z}{z^2+x+y}\right)(x+y+z) \le 3$. Але, оскільки

$(x+y+z)^2 \le 3(x^2+y^2+z^2)=9$, то достатньо довести, що

$$\frac{x}{x^2+y+z}+\frac{y}{y^2+z+x}+\frac{z}{z^2+x+y}\le 1.$$

Маємо $(a^2+b+c)(1+b+c)\ge (a+b+c)^2$ для невід'ємних a,b,c. Тому $\frac{a}{a^2+b+c}\le\frac{a(1+b+c)}{(a+b+c)^2}$. Якщо усі ці нерівності додати, одержимо, що достатньо довести таке: $\frac{x(1+y+z)+y(1+z+x)+z(1+x+y)}{(x+y+z)^2}\le 1$, яке рівносильне $x+y+z\le x^2+y^2+z^2=3$, а це вже було доведено вище.

11.8. (Білокопитов Євген) В гострокутному трикутнику ABC точки A_0, B_0, C_0 — основи висот. Всередині трикутника відмічені такі точки A_1, B_1, C_1, що $\angle A_1BC=\angle A_1AB$, $\angle A_1CB=\angle A_1AC$, $\angle B_1CA=\angle B_1BC$, $\angle B_1AC=\angle B_1BA$, $\angle C_1BA=\angle C_1CB$, $\angle C_1AB=\angle C_1CA$. Точки A_2, B_2 та C_2 — середини відрізків AA_1, BB_1 та CC_1 відповідно. Доведіть, що прямі A_0A_2, B_0B_2 та C_0C_2 перетинаються в одній точці.

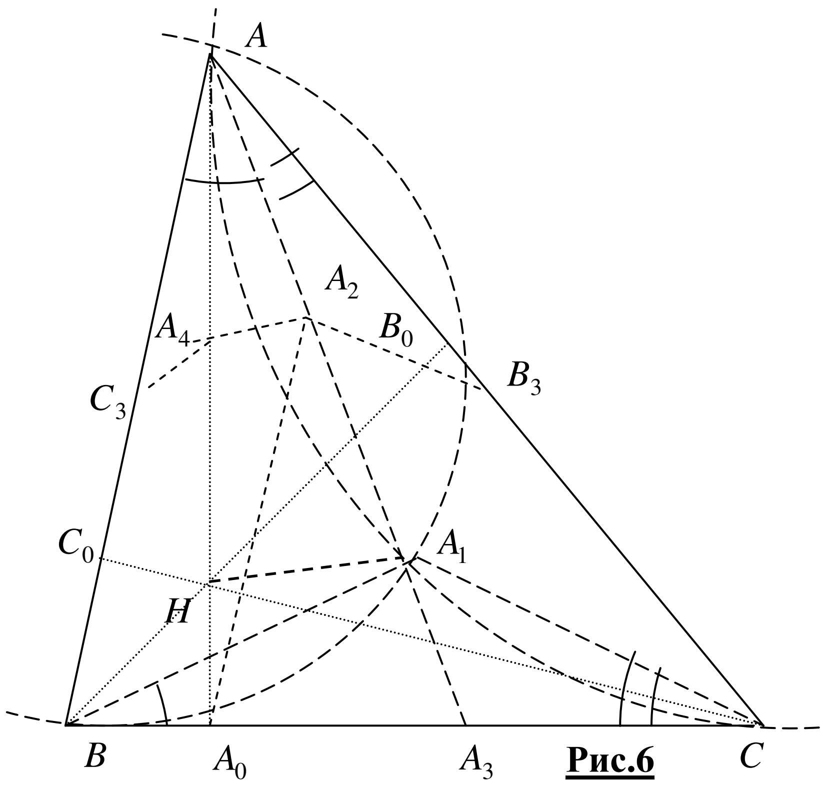


Рис.6

Розв'язання. Позначимо через H — ортоцентр ΔABC, A_3 — перетин прямих AA_1 та BC. Тоді $\Delta A_3BA_1\sim\Delta ABA_3$, $\Delta A_1A_3C\sim\Delta ACA_3$ = $CA_3^2=A_3A_1\cdot AA_3=BA_3^2$ = $CA_3=BA_3$ (рис.6). Оскільки $\angle BA_1C=180°-\angle BAC$, через трикутники BB_0A та CC_0A можна легко знайти, що $\angle BHC=180°-\angle BAC$, тобто $\angle BA_1C=\angle BHC$, тому точки B, H, A_1, C циклічні, і тоді $\angle HA_1C=180°-\angle HBC==90°+\gamma$. Оскільки $\angle A_3A_1C=\angle A_1AC+\angle A_1CA=\gamma$ = $\angle HA_1A_3=\angle HA_1C-\angle A_3A_1C=90°-\gamma+\gamma=90°=$ $=\angle HA_1A$. Звідси ми бачимо, що точки A, C_0, H, A_1 — циклічні, тому $\angle AA_1C_0=\angle AHC_0=180°-\angle AHC=180°-A_oHC_0=\beta$, оскільки точки B, C_0, H, A_1 також циклічні. Тому $\Delta AA_1C_0\sim\Delta ABA_3$. Якщо аналогічно до зроблених побудов знайти точку $C_3=CC_1\cap AB$, то це буде середина сторони AB, тому точки C_3 і A_2 — середини відповідних сторін у подібних трикутниках. Тому $\angle C_0A_2A_1=\angle A_3C_3B=\alpha$. Але $\angle C_0A_0A_3=90°+\angle AA_0C_0=90°+\angle C_0BH=180°-\alpha$, тому й точки A_0, C_0, A_2, A_3 — циклічні. Тому точка A_2 належить колу дев'яти точок ΔABC. Аналогічно точки B_2 та C_2 також належать цьому колу.

Тоді з вище одержаного маємо, що $\angle C_0A_1A_2 = \beta$, $\angle C_0A_2A_1 = \alpha$, тому $\Delta A_1A_2C_0 \sim \Delta ABC$ $=$ $\frac{C_0A_2}{AC} = \frac{A_2A_1}{AB}$, аналогічно $\frac{B_0A_2}{AB} = \frac{A_2A_1}{AC}$ $=$ $\frac{C_0A_2}{B_0A_2} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{\sin\angle C_0A_0A_2}{\sin\angle B_0A_0A_2}$, оскільки усі точки A_0, B_0, C_0 та A_2 лежать на одному колі. Аналогічно $\frac{B_0C_2}{A_0C_2} = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{\sin\angle B_0C_0C_2}{\sin\angle A_0C_0C_2}$ і $\frac{A_0B_2}{C_0B_2} = \frac{AB^2}{CB^2} = \frac{\sin\angle A_0B_0B_2}{\sin\angle C_0B_0B_2}$. Перемножимо останні рівності $\frac{\sin\angle C_0A_0A_2}{\sin\angle B_0A_0A_2} \cdot \frac{\sin\angle B_0C_0C_2}{\sin\angle A_0C_0C_2} \cdot \frac{\sin\angle A_0B_0B_2}{\sin\angle C_0B_0B_2} = 1$, і з теореми Чеви одержимо, що прямі A_0A_2, B_0B_2 та C_0C_2 перетинаються в одній точці.

м. Дніпропетровськ
26 березня 2008 року

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів
Користування будь-якими електронними засобами забороняється

Результати, умови, перебіг подій олімпіади можна буде знайти в Інтернеті за адресою:
www.matholymp.kiev.ua або **www.matholymp.org.ua**