

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади
з математики**

15 січня 2014 року

Завдання. 7 клас

1. Ціна товару збільшилася удвічі, а потім ще на **100%**. На скільки відсотків потрібно зменшити кінцеву ціну товару, щоб вона дорівнювала початковій?
2. Промені OA та OB утворюють прямий кут. Петрик провів усередині цього кута промені OC та OD , кут між якими дорівнює **10°** . Виявилося, що сума найменшого та найбільшого з п'яти кутів AOC , AOD , BOC , BOD , COD складає **85°** . Знайдіть величини кутів, на які розбивають прямий кут AOB промені OC та OD .
3. Чи є число **$2013^{2014} + 3$** квадратом натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.
4. Леся розклала кілька фішок у комірки таблиці **3×3** . У кожну комірку вона могла покласти одну чи кілька фішок або не покласти жодної. Далі Леся підрахувала загальну кількість фішок у кожному рядку та в кожному стовпчику таблиці. Усі шість отриманих чисел виявилися різними. Яку найменшу кількість фішок могла використати Леся?

На виконання роботи відводиться 3 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів забороняється.

**Третій етап Всеукраїнської учнівської
олімпіади з математики.**

15 січня 2014 року

Завдання. 8 клас

1. Сплавляли два злитки. Маса одного з них становила 105 г і він містив 40% міді. Маса другого злитка становила 75 г. Знайдіть відсотковий вміст міді в другому злитку, якщо отриманий сплав містив 50% міді?

2. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2013, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2014, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 2015. \end{cases}$$

3. В трикутнику ABC на стороні BC вибрано таку точку K , що відрізок AK перетинає медіану BM в точці N , причому $AN = BC$. Доведіть, що $BK = KN$.
4. Використавши кожен з десяти цифр рівно один раз, утворіть два числа (цифра 0 не може стояти на першому місці у жодному з чисел), таким чином, щоб модуль їх різниці був найменшим.

5. Відомо, що $\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} = 1$. Знайдіть значення виразу

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{c+d+a} + \frac{c^2}{d+a+b} + \frac{d^2}{a+b+c}.$$

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів забороняється.

**Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з
математики**

15 січня 2014 року

Завдання. 9 клас

1. За 30 монет купили 30 птахів. Скільки купили птахів кожного виду, якщо за 3 горобців платили одну монету, за 2 голубів – одну монету, а за одну горлицю – 2 монети, причому кожного виду купили хоча б одну пташку?
2. При яких значеннях параметра a параболи $y = x^2 + 2014x + a$ та $y = -x^2 + ax + 2014$ дотикаються одна одної?
3. У трикутнику ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. Точки D і F належать AB і BC відповідно. Ці точки розміщені так, що $\angle DCA = \angle FAC = 30^\circ$. Знайдіть $\angle CDF$.
4. Натуральне число $n > 18$ таке, що числа $n-1$ та $n+1$ прості. Доведіть, що n має принаймні вісім різних натуральних дільників.
5. Чи можна в таблиці розміром 7×7 розставити 24 одиниці та 25 нулів (у кожній клітинці записується одне число) так, щоб для будь-якої клітинки, у якій міститься одиниця, сума чисел у сусідніх з нею клітинках дорівнювала 1, а для будь-якої клітинки, у якій знаходиться нуль, сума чисел у клітинках, сусідніх з нею, була відмінною від 1 (дві клітинки вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону).

На виконання роботи відводиться 3 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів забороняється.

Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

15 січня 2014 року

Завдання. 10 клас

1. Дійсні числа x та y задовольняють умову:

$$\frac{x+2}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{4-y}{x}. \text{ Яких значень може набувати добуток } xy?$$

2. Знаменник дробу менший від квадрата його чисельника на 1. Якщо до чисельника і знаменника дробу додати по 2, то дріб буде більший за $\frac{1}{4}$. Якщо від чисельника і знаменника відняти по 3, то значення дробу стане меншим за $\frac{1}{10}$. Знайдіть цей дріб.

3. Чи має розв'язки в цілих числах система рівнянь

$$\begin{cases} (a+b)(a+c)(a+d) = 2, \\ (b+a)(b+c)(b+d) = 0, \\ (c+a)(c+b)(c+d) = 0, \\ (d+a)(d+b)(d+c) = 3 \end{cases} \quad ?$$

4. У трикутнику ABC $AB = 16$ см, $BC = 25$ см, $AC = 39$ см. Пряма, яка проходить через центр вписаного кола трикутника ABC і точку M – середину сторони BC , перетинає висоту AD цього трикутника в точці P . Знайдіть довжину відрізка AP .

5. У таблиці 3×3 розставили числа $1; 2; \dots; 9$ (кожне число по разу) таким чином, щоб сума чисел у кожному з чотирьох квадратів 2×2 дорівнювала деякому фіксованому числу S . Знайдіть найбільше можливе значення S .

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів забороняється.

Третій етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

15 січня 2014 року

Завдання. 11 клас

1. Розв'яжіть рівняння:

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = 4$$

2. Для додатних чисел a та b доведіть нерівність:

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^{2014} + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{2014} \geq 2^{2015}.$$

3. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює її меншій основі. Яким має бути кут при більшій основі трапеції, щоб її площа була найбільшою?

4. Оленка вибрала два числа a та b з множини $\{1; 2; 3; \dots; 26\}$.

Виявилося, що їх добуток дорівнює сумі решти 24 чисел з цієї множини.

Знайдіть числове значення виразу $|a - b|$.

5. Знайдіть найменше натуральне число n , для якого в кожній клітинці таблиці розміром $n \times n$ можна записати ціле число з відрізка $[-30; 30]$ так, щоб усі цілі числа цього відрізка виявилися записаними, причому ані в жодному рядку, ані в жодному стовпці не знайшлося пари чисел з від'ємним добутком.

На виконання роботи відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Використання калькуляторів забороняється.