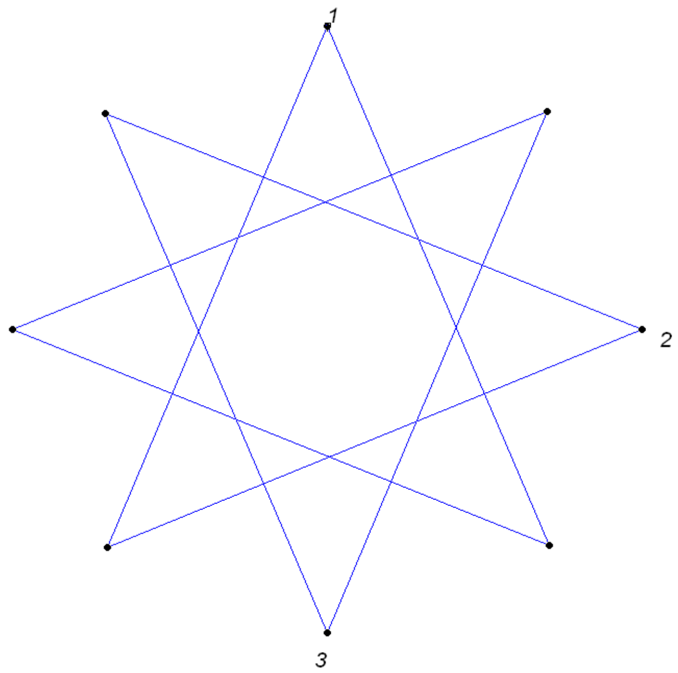
Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 6 клас

1. Знайдіть останню цифру числа 975 31*, якщо відомо, що воно ділиться на 6, але не ділиться на 9.
2. Бідон місткістю 10л заповнено молоком. Як перелити з нього 5л молока в семилітровий бідон, використовуючи порожній трилітровий бідон?
3. Годинник Петра відстає на 10 хвилин, але Петро впевнений, що він поспішає на 5 хвилин. Годинник його товариша Богдана поспішає на 5 хвилин, але Богдан думає, що він відстає на 10 хвилин. Петро з Богданом домовились зустрітися о 16год 00хв. Хто з них двох прийде на зустріч раніше і на скільки хвилин?
4. Числа 1, 2, 3 та 4 потрібно записати по одному біля кожної з 8 вершин многокутника так, щоб на кінцях відрізків, що з'єднують вершини, стояли різні числа. Яку найбільшу кількість разів можна використати число 4, якщо три числа уже розміщені (див. малюнок)?



5. У таблиці, зображеній на малюнку, в кожному стовпчику і кожному рядку мають бути дві червоні клітинки (Ч) і дві зелені клітинки (З). Якого кольору клітинки А та В відповідно?

Ч		Ч	
		Ч	
	А		З
	В		

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

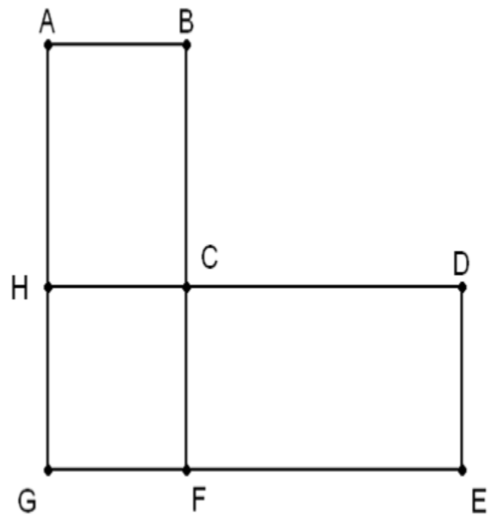
Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 7 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $|x-4| + |2x-8| = 0$.
2. Петрик з'їв $\frac{1}{3}$ всіх яблук і ще 2 яблука, Миколка з'їв $\frac{1}{4}$ всіх яблук і ще 1 яблуко, а Вітя – половину тих яблук, що залишилися після Петрика і Миколки. Після цього залишилась $\frac{1}{6}$ від початкової кількості яблук. Скільки яблук було спочатку?
3. У коробці містяться 7 карток з написаними на них числами від 1 до 7 (одне число на картці). Перший мудрець навмання бере 3 картки з коробки, а другий – 2 картки (2 картки залишилося у коробці). Перший мудрець, дивлячись на свої картки, каже другому: «Я точно знаю, що сума чисел на твоїх картках парна». Чому дорівнює сума чисел, записаних на картках першого мудреця?
4. На малюнку зображено план міста. У місті є чотири автобусні маршрути. Автобус № 1 їде дорогою C-D-E-F-G-H-C, довжина якої 17км. Маршрут автобуса № 2 - A-B-C-F-G-H-A, а довжина 12км. Довжина маршруту автобуса № 3 A-B-C-D-E-F-G-H-A дорівнює 20км. Автобус № 4 проїжджає через C-F-G-H-C. Яка довжина цієї дороги?



5. Петро та Іван грають в гру. За першим ходом Петро називає число, що не перевищує 6, а Іван додає до нього деяке число, що також не перевищує 6, і називає суму. Далі Петро до названої суми додає число не більше 6 і називає нову суму і т.д. Виграє той, хто першим назве число 2013. Хто може забезпечити собі виграш?

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

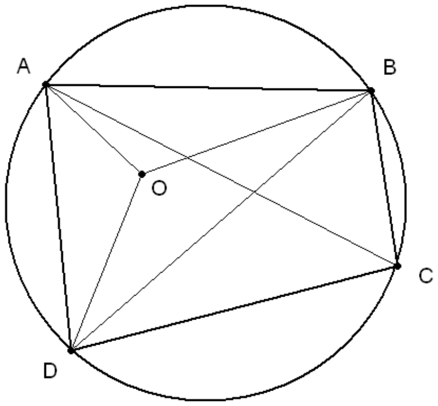
Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 8 клас

1. Оксана у 27 років мала трьох синів різного віку (вік кожної дитини – натуральне число). Минуло 10 років, і її вік дорівнює сумарному віку її трьох синів. Скільки років нині синам Оксани?
2. Побудуйте графік функції $y = \frac{|x-2|}{x-2}$.
3. При яких значеннях ***a*** рівняння $\frac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ має один корінь.
4. На малюнку зображено вписаний у коло чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle ACB = 54^\circ$, $\angle ACD = 42^\circ$, $\angle ABO = 21^\circ$ і $\angle ADO = \angle ODB$. Знайдіть $\angle BAO$.



5. Знайдіть останні дві цифри числа $21^{2013} - 11^{2013}$.

На виконання роботи відводиться 3 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 9 клас

1. Розв'яжіть рівняння: $(3x+2y-4)^2 + |3x-5y+3| = 0$
2. Побудуйте графік функції: $y = \sqrt{4+4x+x^2} - \sqrt{4-4x+x^2}$
3. У трикутнику*ABC* кут *BAC* дорівнює 40°, а сторони *AB* та *AC* рівні. На сторонах *AB* та *BC* трикутника вибрано точки *S і T* відповідно так, що $\angle BAT = \angle BCS = 10^\circ$.
   Прямі *AT* та *CS* перетинаються в точці *P*. Доведіть, що *TB=2TP*.
4. Якщо між цифрами двоцифрового числа, вписати число, на одиницю менше від нього, вийде чотирицифрове число, яке в 91 раз більше від нього. Знайдіть це двоцифрове число.
5. Доведіть, що $n^5 - 5n^3 + 4n$ ділиться на 120.

На виконання роботи відводиться 3 години
Кожне завдання оцінюється в 7 балів
Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 10 клас

1. Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;y)$, які задовольняють нерівність $\sqrt{x^2-6x+18}\cdot\sqrt{y^2+14y+50}\le 3$.

2. Обчисліть площу прямокутного трикутника, якщо медіана проведена до гіпотенузи, має довжину 15 см, а радіус вписаного кола – 4 см.

3. Знайдіть усі такі пари простих чисел p і q , для яких має місце рівність $p^5-(4p-q)^2=2q^2$.

4. Розв’яжіть рівняння:

$\left(\frac{37}{21}x\right)^3=$ p, де p – середнє арифметичне чисел:

$A=\frac{158^2+158\cdot185+185^2}{158+185}$ і $B=\frac{158^2-158\cdot185+185^2}{185-158}$.

5. Задумали два натуральні числа. Математику А повідомили їхню суму, а математику В – суму їхніх квадратів. Якщо А і В обміняються своєю інформацією, то вони, напевно, визначать ці числа. Але вони визначили їх у ході такої розмови:

В: «Я не знаю, які це числа».

А: «Їхня сума більша від десяти».

В: «Тоді я знаю, які це числа».

Знайдіть ці числа.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Другий етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року

Завдання. 11 клас

1. Числа a і b задовольняють рівність $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$. Знайдіть усі можливі значення виразу $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.
2. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису гострого кута; відрізок, що сполучає її основу з точкою перетину медіан, перпендикулярний до катета. Знайдіть кути трикутника.
3. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a і b виконується нерівність $\left(a^2+b\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}\right)\geq 4\sqrt{\frac{a}{b}}$.
4. Знайдіть всі розв’язки рівняння: $2^{2x}-2^{x+1}\cdot\sin y+1=0$.
5. По колу розміщено 11 натуральних чисел. Відомо, що будь-які два сусідні числа відрізняються не менш ніж на 20, а сума будь-яких двох сусідніх чисел не менш 100. Знайдіть найменшу можливу суму всіх чисел на колі.

На виконання роботи відводиться 3 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється

Вказівки до розв'язання завдань другого етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

м. Тернопіль. 24 листопада 2013 року.

6 клас

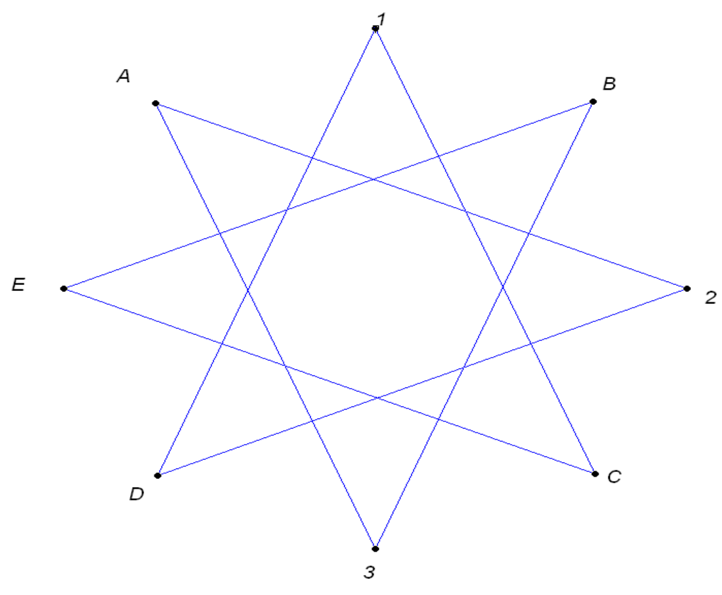
1. Сума цифр числа без врахування останньої цифри (зірочки) дорівнює 25. Щоб число ділилось на 3, треба, щоб замість зірочки стояла одна з цифр 2, 5 або 8. Якщо поставити цифру 2, то число буде кратним 9; якщо поставити 5, воно не буде ділитися на 6; якщо ж поставити цифру 8, отримане число 975 318 задовольнятиме умову задачі.

2. Складемо таблицю:

Бідони	Переливання							
10л	3	3	6	6	9	9	2	2
7л	7	4	4	1	1	0	7	5
3л	0	3	0	3	0	1	1	3

3. Петро прийде на зустріч коли його годинник буде показувати 16 годин 05 хвилин, а дійсним часом буде 16 годин 15 хвилин. Богдан прийде на зустріч коли на його годиннику буде 15 годин 50 хвилин, а дійсним часом буде 15 годин 45 хвилин. Відповідь: Раніше прийде Богдан на 30 хвилин.

4. Якщо «незайняті» вершини позначити як A, B, C, D, E, то у вершинах A, B, C, D повинно стояти число 4, а у вершині, позначеною літерою E, не може стояти 4, бо вона з'єднана з вершинами B та C.



Відповідь: 4.

5.Якщо заповнити таблицю згідно з правилом, вказаним в задачі то клітинки A і B будуть червоного кольору. Відповідь: A, B – червоні.

7 клас

1. Нехай було х яблук, тоді Петрик з'їв $\left(\frac{1}{3}x+2\right)$ яблук, Миколка з'їв $\left(\frac{1}{4}x+1\right)$яблук, після чого залишилось $x-\frac{1}{3}x-2-\frac{1}{4}x-1=\frac{5x-36}{12}$ яблук. З них Вітя з'їв половину, тобто $\frac{5x-36}{24}$ яблук і стільки ж залишилось, що складало $\frac{1}{6}x$ яблук. З рівняння $\frac{5x-36}{24}=\frac{1}{6}x$ знаходимо, що x = 36.

Відповідь: 36 яблук

2. Перший мудрець міг сказати таку фразу лише коли у нього були б усі картки, на яких записані парні числа (сума будь-яких двох непарних чисел другого мудреця є парним числом). Тоді сума чисел на його картках дорівнює 2+4+6=12.

Відповідь: 12.

3. За умовою *CD+DE+EF+FG+GH+HC=17, AB+BC+CF+FG+GH+HA=12, AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA=20.* Тоді *(CF+FG+GH+HC)+ +(AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH+HA) = 29.* Звідси *CF+FG+GH+HC+20=29, CF+FG+GH+HC = 9.*

Відповідь: 9км

4. Має місце рівність $2013=287\cdot 7+4$. Виграє Петро, якщо він першим ходом назве число 4. Якщо потім Іван назве число $1\le k\le 6$, то Петро назве $7-k$, бо $1\le 7-k\le 6$ і т.д.

5. Якщо підносити 21 до степеня, то 21,41,61,81,01,21,… – можливі останні дві цифри. Аналогічно, якщо підносити 11 до степеня, то 11,21,31,41,51,61,71,81,91,01.11,… – можливі останні дві цифри. Отже, число 21^{2013} буде закінчуватись на 61, а число 11^{2013} буде закінчуватись на 31, тому число $21^{2013}-11^{2013}$ буде закінчуватись на 30.

Відповідь: 30.

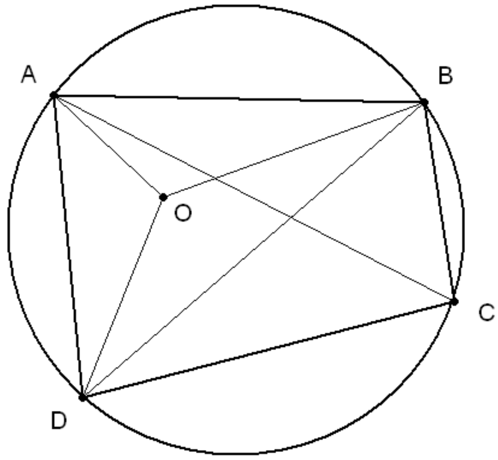
8 клас

1. Нехай, коли Уляні було 27, її синам було ***x, y*** та *z* років. Тоді, виходячи з умови задачі, можемо записати таку рівність: $\boldsymbol{37 = (x + 10) + (y + 10) + (z + 10)}$, або $\boldsymbol{x + y + z = 7}$. Тепер треба знайти попарно різні натуральні числа ***x, y, z,*** сума яких дорівнює ***7***. Шляхом перебору легко переконатись, що єдині такі три числа – це1, 2 і 4, тому нині синам 11, 12 і 14 років.
Відповідь:11, 12 та 14 років.

2. $x \neq 2$, $y = 1$ якщо $x > 2$ і $y = -1$, якщо $x < 2$.

3. $\dfrac{(x-a)(x-3a)}{x+9} = 0$ має один корінь, якщо $a = -9$, або $a = -3$, або $a = 0$.

4. $\angle ACD = \angle ABD = 42^\circ$, $\angle ADB = \angle ACB = 54^\circ$.
Тоді $\angle OBD = \angle ABD - \angle ABO = 42^\circ - 21^\circ = 21^\circ$.
Отже, $BO -$ бісектриса і точка O є точкою перетину бісектрис в ΔABD. Тоді $AO -$ бісектриса і
$\angle BAO = \dfrac{\angle BAD}{2} = \dfrac{180^\circ - \angle ADB - \angle ABD}{2} =$
$= 90^\circ - 21^\circ - 27^\circ = 42^\circ$.
Відповідь: 42°.



5. Якщо підносити 21 до степеня, то 21,41,61,81,01,21,… – можливі останні дві цифри. Аналогічно, якщо підносити 11 до степеня, то 11,21,31,41,51,61,71,81,91,01.11,… – можливі останні дві цифри. Отже, число 21^{2013} буде закінчуватись на 61, а число 11^{2013} буде закінчуватись на 31, тому число $21^{2013} - 11^{2013}$ буде закінчуватись на 30.
Відповідь: 30.

9 клас

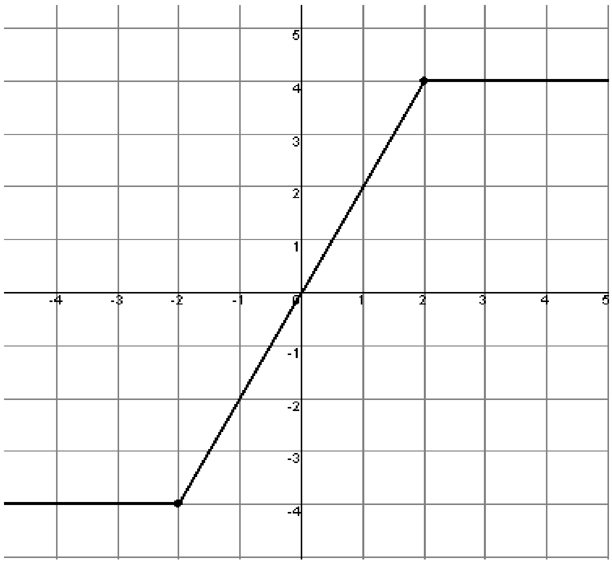
1.Розв'яжіть рівняння: $(3x+2y-4)^2+|3x-5y+3|=0.$

(3x + 2y – 4 = 0 і *3x – 5y+30=0.*

Розв'яжемо систему: $\begin{cases}3x+2y-4=0,\\3x-5y+3=0.\end{cases}$

$x=\dfrac{2}{3}, y=1.$

2. Спростимо вигляд функції: $y=|2+x|-|2-x| = \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\y=-4;\end{cases}\\ \begin{cases}-2\le x<2,\\y=2x;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\y=4\end{cases}\end{array}\right.$



3. Оскільки трикутник *ABC* рівнобедрений, $\angle ABC = \angle BCA = (180° - \angle BAC)/2 = 70°$. Звідси $\angle TAC = \angle BAC - BAT = 30°$, $\angle SCA = \angle BCA - \angle BCS = 60°$ і $\angle TPS = \angle APC = 180° - \angle TAC - \angle SCA = 90°$.

4. Якщо між числами двоцифрового числа, вписати число, на одиницю менше від нього, вийде чотирицифрове число, яке в 91 раз більше від нього. Знайдіть це двоцифрове число.

$\overline{ab}=10a+в$ – початкове двоцифрове число, $\overline{a(\overline{ab}-1)b}$ – утворене чотирицифрове число. За умовою задачі одержимо рівняння: *1000a+100a+10в–10+в = 91(10a+в).* Звідси, *8в =19a–1.*Методом перебору знаходимо, що***a=3, в=7.*** Отже, двоцифрове число ***37***.

5. Розклавши на множники подану суму $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, отримаємо добуток п'яти послідовних чисел. Серед трьох послідовних чисел одне ділиться на 3, тому і добуток ділиться на 3, одне з чотирьох послідовних чисел ділиться на 2, а одне на 4, тому їх добуток ділиться на

8. Серед п’яти послідовних чисел одне ділиться на 5. Тому добуток всіх чисел ділиться на $3 \cdot 5 \cdot 8 = 120$.