Рекомендації щодо розв'язання завдань
7 клас

1. 10· 0,54 = 5,4 (кг) - міді в новому сплаві.

Нехай I сплаву треба взяти х кг, тоді II – (10–х) кг.

В сплаві міді 0,4х кг, а в II: 0,6·(10 – х) = (6–0,5х) кг.

Складемо рівняння:

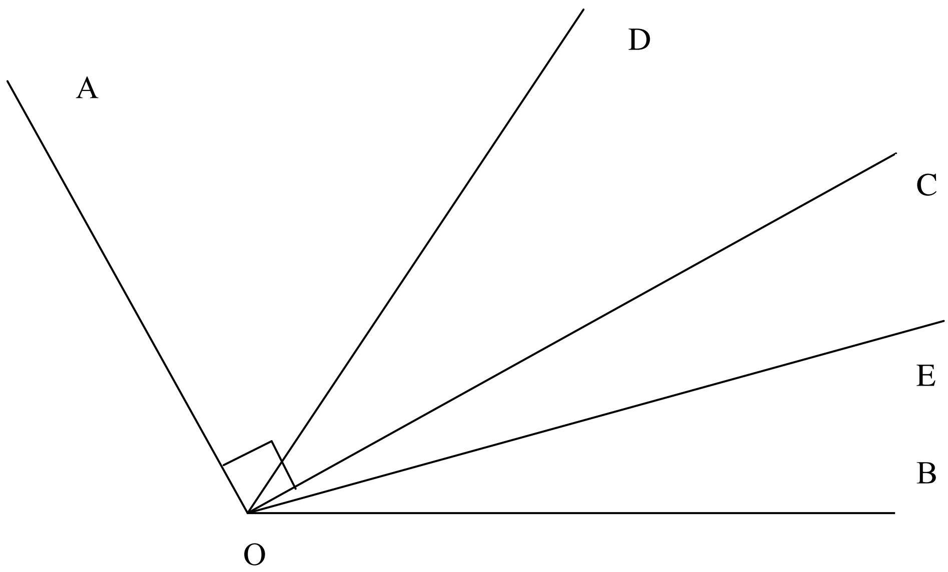
0,4х + 6 – 06х = 5,4 ;

-0,2х = -0,6 ;   х=3;

10-3 = 7 (кг).

Відповідь. 3 кг, 7 кг**.**

2.



$\angle AOC = 90^0, \angle AOД = \angle DOB, \angle COE = \angle EOD = x, \angle AOB = 90^0 + 2x,$

$\angle DOB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}(90^0 + 2x) = 45^0 + x;$

$\angle DOE = \angle DOB - \angle EOB = 45^0 + x - x = 45^0.$

Відповідь. $\angle DOE = 45^0.$

3. Нехай задано п'ять послідовних натуральних чисел: *n-2; n-1; n ; n+1; n+2; n>2.*

$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 =$

$5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$

n^2+2 не кратне 5, оскільки n^2 закінчується на цифру: 0; 1; 4; 5; 6; 9. Тоді : n^2+2 *– 2; 3; 6; 7; 8; 1* – не закінчується на 0 і 5, то n^2+2 - не кратне 5 і $5n^2+10$ *не є квадратом натурального числа.*

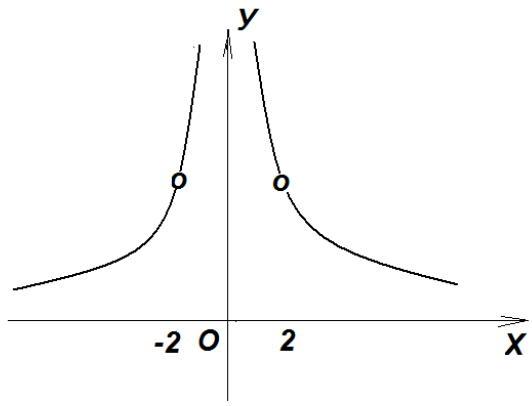
4. Розіб'ємо всіх учнів класу на 14 груп: до I – увійдуть ті учні, які написали диктант без помилок, до II – ті, які зробили одну помилку, до III – дві помилки, ……до тринадцятої групи – 12 помилок, до 14 – 1 учень, який зробив 13 помилок. Якби у кожній із перших тринадцяти груп було не більше двох учнів, то число учнів у класі не перевищувало б 2·13 +1=27 учнів. Оскільки в класі 28 учнів, то принаймні в одній з груп має бути хоча б 3 учні.

8 клас

1. Область визначення функції: $x^3 – 4x \neq 0$.

$x \neq 0$; $x \neq -2$; $x \neq 2$.

$y = \left|\frac{10x^2-40}{x^3-4x}\right| = \left|\frac{10(x^2-4)}{x(x^2-4)}\right| = \left|\frac{10}{x}\right|$ Якщо $x \succ 0$, то $y=\frac{10}{x}$; якщо $x \prec 0$, то $y=\frac{10}{x}$.



2. Нехай задане число **n**=100a+ 10b +c ; Тоді 11·(a+ b+c)= 100a+ 10b +c;

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c}=11;$$

$$\frac{99a+9b}{a+b+c}+1=11;$$

$$\frac{9(11a+b)}{a+b+c}=10.$$

Отже, значення виразу $a+b+c$ повинно бути кратним 9, тобто $a+b+c$=9k,
Цифра розряду одиниць у значенні виразу 11a+b повинна бути нулем, тобто

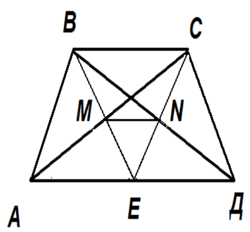
$$\frac{9(11a+b)}{10+8}=10;$$

a+b = 10, тоді 10+c = 9k, отже k=2 і c=8. Отримуємо: $\frac{11a+b}{2}=10;$

$$11a+b=20.$$

Отже a=1, то b=9. Шукане число: **n= 198**.

3.



Нехай задано трапецію АВСД, рівнобічну, у якої АС=ВД; АД||ВС; ВС=3 см; АД=12 см; АЕ=ЕД=6 см. MN-?

1. MN||BC||AД

2. $\Delta AME \sim \Delta CMB$; $\dfrac{BC}{AE}=\dfrac{BM}{ME}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\Delta BCE \sim \Delta MNE$; $\dfrac{BC}{MN}=\dfrac{BE}{ME}=\dfrac{BM+ME}{ME}=\dfrac{BM}{ME}+1=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{BC}{MN}=\dfrac{3}{2}$;

$MN=BC\cdot\dfrac{2}{3}$. $MN=3\cdot\dfrac{2}{3}=2$ *(см).*

4. Оскільки $abc=1$, то $ab=\dfrac{1}{c},bc=\dfrac{1}{a}$. Отримаємо:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{1}{1+a+\frac{1}{c}}+\frac{1}{1+b+\frac{1}{a}}+\frac{1}{1+c+ca}=$$

$$=\frac{1}{\frac{c+ac+1}{c}}+\frac{1}{\frac{a+ba+1}{a}}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{c}{c+ac+1}+\frac{a}{a+ba+1}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

З одержаного: $\dfrac{1}{1+b+bc}=\dfrac{a}{a+ba+1}=\dfrac{ac}{1+c+ac}$.

Тоді:

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{c}{c+ac+1}+\frac{ac}{1+c+ca}+\frac{1}{1+c+ca}=\frac{c+ac+1}{1+ac+c}=1.$$

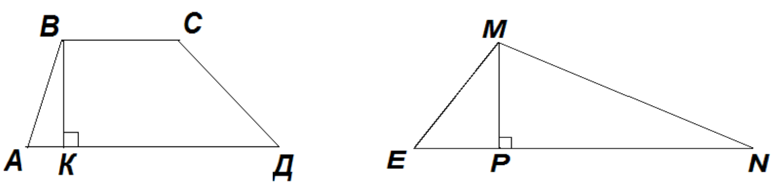
5. Представників Андромеди було **30** або **10**.

Якщо за столом усі – представники Андромеди, то вони можуть збрехати так, як зазначено в умові.

Розглянемо випадок, коли серед присутніх є хоча б один представник Сіріуса. Оскільки він каже правду, то з одного боку від нього сидить інший представник Сіріуса. З двох боків від цієї пари сіріусян сидить два андромедійці (інакше андромедієць каже правду). Таким чином, усі сіріусяни сидять парами, а ці пари розділені поодинокими андромедійцями. Отже маємо таке розміщення за столом: ….**АССАССАССАССА**…

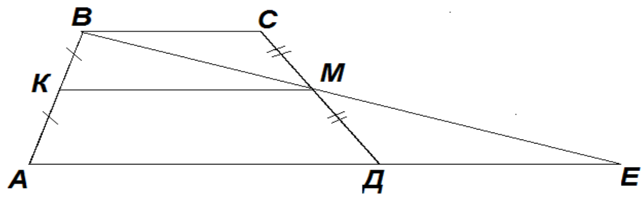
9 клас

1. І спосіб:



$S=\dfrac{AD+BC}{2}\cdot BK$. EN=AD+BC. MP=KB. $S=\dfrac{1}{2}EN\cdot MP$.

II спосіб:



$S_{\Delta ABE} = S_{ABCD}$

2. Відповідь. -2; $6\frac{1}{6}$.

$\frac{a^2+b^2}{ab}$; $\frac{a^2-6b^2}{ab}=5$;

$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2}{ab}+\frac{b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

$\frac{a^2-6b^2}{ab}=5,$

$\frac{a^2}{ab}-\frac{6b^2}{ab}=5,$

$\frac{a}{b}-6\frac{b}{a}=5,$

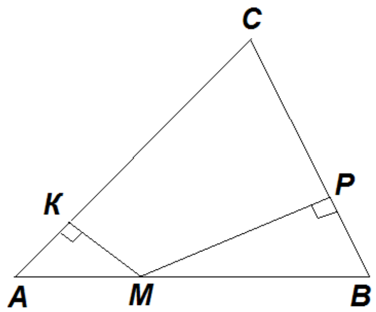
$\frac{a}{b}=x,$

$x-6\frac{1}{x}-5=0,\quad x^2-5x-6=0,\quad x_1=-1, x_2=6.$

1. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=-1-1=-2.$

2. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=6+\frac{1}{6}=6\frac{1}{6}.$

3.



$\angle$CKM=$\angle$CPM =90º, то навколо чотирикутника MKCP можна описати коло з діаметром CM. Тоді для будь-якого розташування точки M маємо $\angle$KCP+$\angle$KMP=180º. Отже, $\angle$KMP=const. Довжина хорди KP буде найбільшою, якщо найменшим буде діаметр такого кола, тобто, якщо точка M є основою висоти CM трикутника ABC. Оскільки трикутник – гострокутній, то M є AB.

4. Позначимо вартість однієї книги – x_1, зошита – x_2, ручки – x_3, а одержані решти – r_1, r_2, r_3. Тоді умови задачі можна записати таким чином: $n=x_1+r_1$, $n=2x_2+r_2$, $n=5x_3+r_3$, при цьому: $r_1 \prec x_1$; $r_2 \prec x_2$; $r_3 \prec x_3$. $n= x_1+ r_1>2r_1$; $n= 2x_2+ r_2>3r_2$; $n= 5x_3+ r_3>6r_3$. звідси випливає,

що
$$r_1 \prec \frac{1}{2}n,$$
$$r_2 \prec \frac{1}{3}n,$$
$$r_3 \prec \frac{1}{6}n.$$

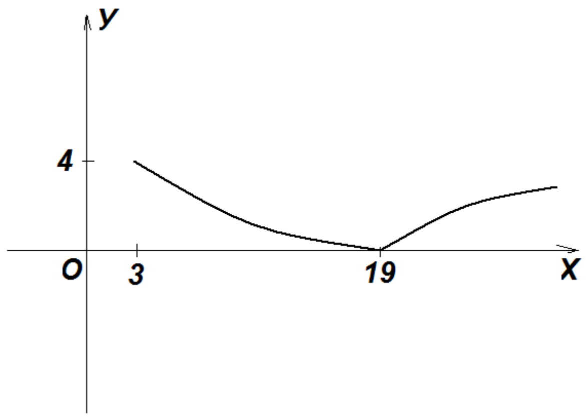
$n=r_1+r_2+r_3<\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}n+\frac{1}{6}n=n$.

Одержана суперечність доводить, що при купівлі було допущено помилку.

5. Оскільки кожне із шуканих простих чисел є сумою двох простих чисел, то воно не менше за 5, а тому є непарним. Звідси випливає, що у кожній сумі простих чисел одним із доданків повинно бути 2, а в кожній різниці – від’ємником 2 (інакше сума простих чисел буде парною). Отже, це числа виду: $p-2$; p; $p+2$. Але з трьох послідовних непарних чисел одне обов’язково ділиться на 3. Єдиним простим числом дільником 3 є 3.
Якщо $p+2 =3$, то $p=1$, тобто p – не є простим числом.
Якщо $p=3$, то $p-2=1$, $p-2$ – не є простим числом.
Якщо $p-2=3$, то $p=5$, $p+2=7$, тобто p і $p+2$ – є простими числами.
Умову задовольняє єдине число $p=5$.
Відповідь. 5.

10 клас

1. Графік функції $y=\left|\sqrt{x-3}-4\right|$



2. Позначимо шукане число 9х, а суму його цифр – S(9x). Тоді за умовою задачі S(9x) - S(x)=9. Враховуючи ознаку подільності на 9, одержимо S(9x)націло ділиться на 9. Тоді з рівності S(9x)- S(x) =9, випливає, що S(x):9, а тому х націло ділиться на 9. Тоді 9х ділиться на 81. Трицифрові числа, які кратні 81, є такими: 162; 243; 324; 405; 486; 567; 648; 729; 810; 891; 972. Вказану в умові задачі властивість мають 5 трицифрових чисел: 486; 567; 648; 729; 972.

Відповідь. П'ять.

3. $\frac{1^2}{1^4+1}+\frac{2^2-1}{2^4+2}+\frac{3^2-2}{3^4+3}+\ldots+\frac{100^2-99}{100^4+100}=\frac{x}{x+1}$.

Кожний доданок у лівій частині можна подати у вигляді:

$$\frac{n^2-(n-1)}{n^4+n}=\frac{n^2-n+1}{n(n^3+1)}=\frac{n^2-n+1}{n(n+1)(n^2-n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

Отже,

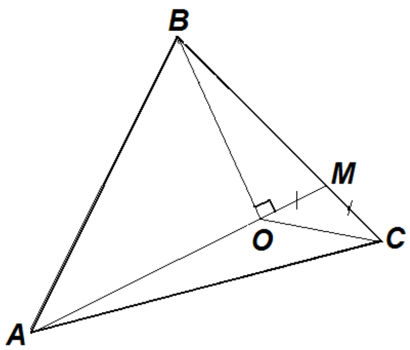
$$\frac{1^2}{1^4+1}+\frac{2^2-1}{2^4+2}+\frac{3^2-1}{3^4+3}+\ldots..+\frac{100^2-99}{100^4+100}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots.(\frac{1}{100}-\frac{1}{101})=$$

$$=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}.$$

$$\frac{x}{x+1}=\frac{100}{101}.$$

$$x=100.$$

3.



$\angle A=\frac{\angle B+\angle C}{2}$.

$\angle AMB=60^0, BM=2MC.$

$\angle ABC$ - ?

Проведемо $BO\perp AM, \angle OBM=30^0, OM=\frac{1}{2}BM=MC.$

$\angle OMC=120^0, \angle MOC=\angle MCO=30^0.$

$2\angle A=\angle B+\angle C;$

$\angle BOC=120^0=2\angle BAC,$

Тому т. O – центр кола, описаного навколо $\Delta ABC, \angle AOC = 150^0$, то $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 75^0$.

4.

21	20	19*	18	17*	36	37*
22	3	2*	1	16	35	38
23*	4	5*	6	15	34	39
24	9	8	7*	14	33	40
25	10	11*	12	13*	32	41*
26	27	28	29*	30	31*	42
49	48	47*	46	45	44	43*

Пофарбуємо клітинки таблиці в шаховому порядку. Всі парні числа опиняються в клітинках одного кольору, а всі непарні – в клітинках другого кольору. Оскільки в будь-якому стовпчику три клітинки одного кольору і чотири – другого, то в ньому буде три парні і чотири непарні числа або навпаки.

Оскільки серед простих чисел парне лише одне, то всього простих чисел у стовпчику може бути щонайбільше 5.

11 клас

1.

$$x^2(4+\log_2^2 y)+2x\log_2 y+\log_2^2 y+1 \ge 0,$$

$$4x^2+x^2\log_2^2 y+4x\log_2 y-2x\log_2 y+1+\log_2^2 y \ge 0,$$

$$(1-2x\log_2 y+x^2\log_2^2 y)+(4x^2+4x\log_2 y+\log_2^2 y) \ge 0,$$

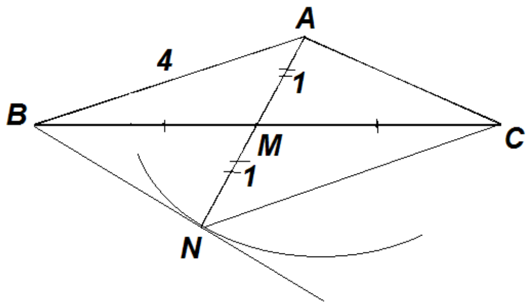
$$(1-x\log_2 y)^2+(2x+\log_2 y)^2 \ge 0.$$

2.

Можна, наприклад, викресливши 10!. Тоді решту множників згрупуємо в пари: 2!3!; 4!5!; 6!7!; 8!9!; 11!12!; 13!14!; 15!16!; 17!18!; 19!20!. В кожній парі $k!\cdot(k+1)! = k!\cdot k!\cdot(k+1) = (k!)^2\cdot(k+1)$ виділимо множник $(k!)^2$. Зрозуміло, що добуток таких множників є квадратом цілого числа. Тому достатньо показати, що й добуток решти множників, тобто число $1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20$ теж є точним квадратом.

$1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 12\cdot 14\cdot 16\cdot 18\cdot 20 = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 2^4\cdot 2\cdot 3^2\cdot \cdot 2^2\cdot 5 = 2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^2\cdot 7^2 = (2^5\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7)^2$.

3.



Проведемо AN=2AM, тоді ABNC – паралелограм, $\angle$BAC=180^0–$\angle$ABN. Потрібно знайти максимальне значення $\angle$ ABN. Розглянемо коло з центром A і R=2. Точка N – лежить на цьому колі, $\angle$ABN – найбільший, якщо BN – дотична до кола. Тоді, $\angle$BNA=90^0, AB = 4, AN = 2, то $\angle$ABN=30^0, тоді $\angle$BAC = 150^0.

4. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(4-x\sqrt{3})^2}=1,$

I спосіб

Нехай $\frac{1}{x}=\sin\alpha, \frac{1}{4-x\sqrt{3}}=\cos\alpha,$

Тоді $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin\alpha}, \\ \dfrac{1}{4-\dfrac{1}{\sin\alpha}\cdot\sqrt{3}}=\cos\alpha, \end{cases}$

$\sin\alpha\neq 0, \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,$

$\sin\alpha\neq\frac{\sqrt{3}}{4}.$

$\sin\alpha=\cos\alpha(4\sin\alpha-\sqrt{3}),$

$\sin\alpha=4\cos\alpha\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha,$

$\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin 2\alpha,$

$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin 2\alpha,$

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=\sin 2\alpha,$

$\alpha+\frac{\pi}{3}=2\alpha+2\pi n,$ або $\alpha+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi m, n, m\in Z.$

$3\alpha=\pi-\frac{\pi}{3}+2\pi m, m\in Z,$

$\alpha=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,$

$\alpha=\frac{2\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi m, m\in Z.$

Тоді : $x=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}$; $x=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{9}}$; $x=\frac{1}{\sin\frac{8\pi}{9}}$; $x=\frac{1}{\sin\frac{14\pi}{9}}$.

ІІ спосіб

Введення заміни t$=(2-x\sqrt{3})$. Тоді $x=\frac{2-t}{\sqrt{3}}$.

Отримаємо рівняння: $\frac{3}{(2-t)^2}+\frac{1}{(2+t)^2}=1$.

5. Див. задачу № 5 для 10 класу.