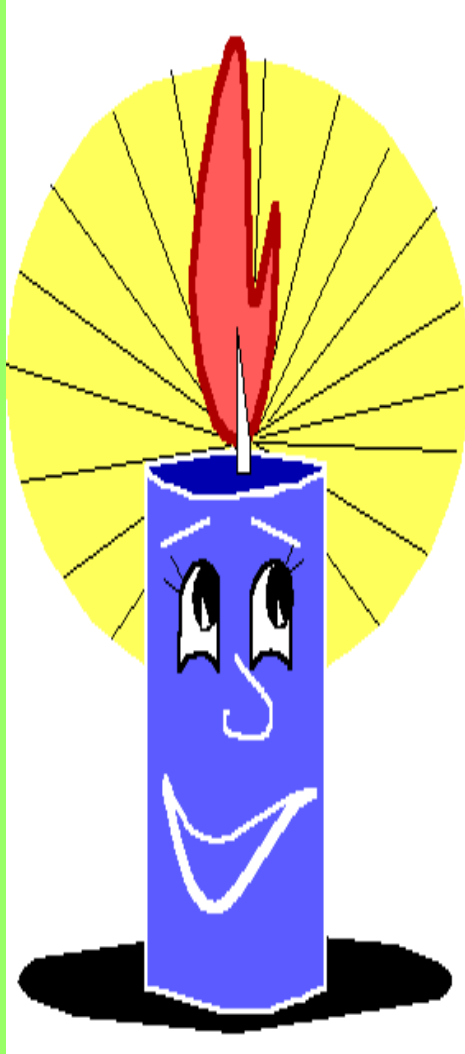
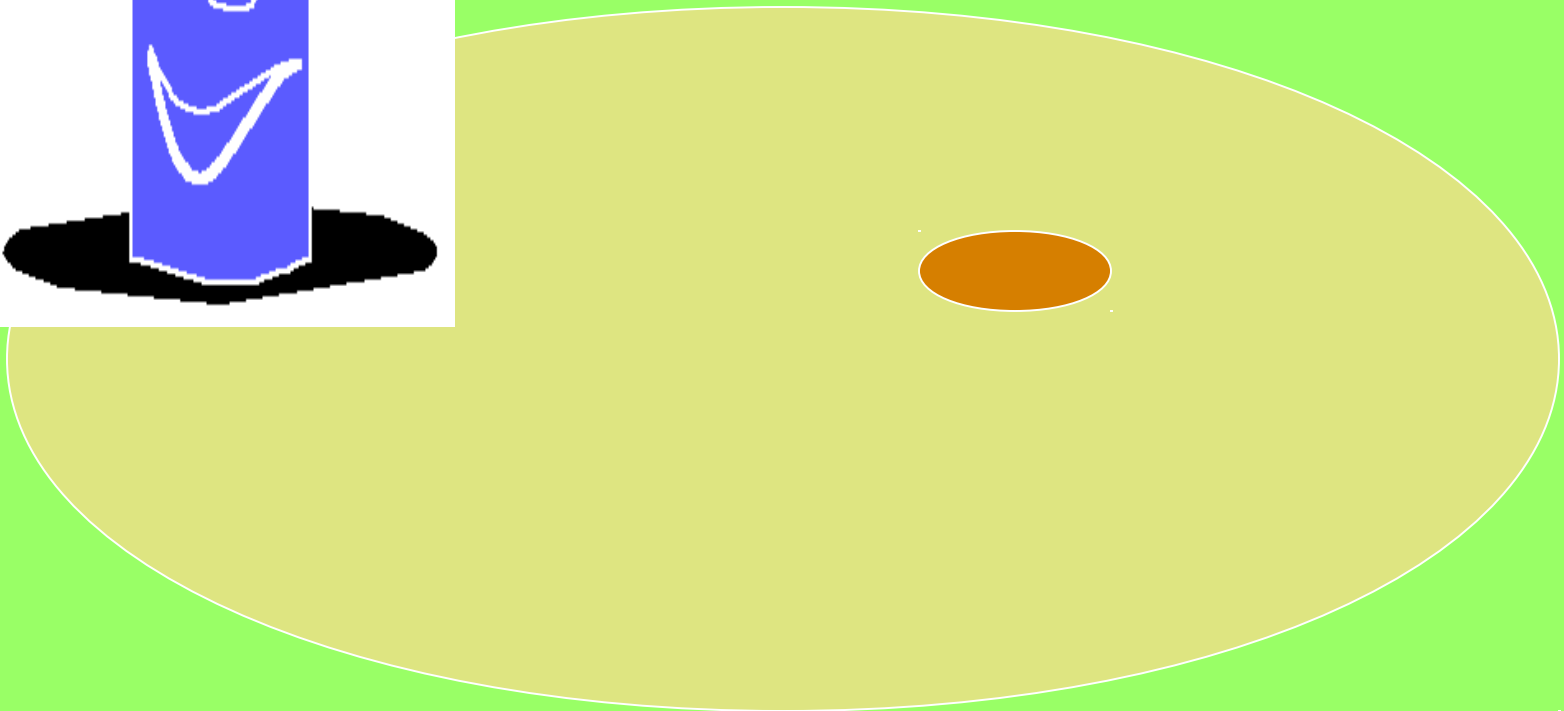




На якій висоті над
столом має знаходитися
полум'я свічки, щоб
монета, яка лежить на
столі, була освітлена
найяскравіше?



Проектування

Може здаватися, що для найкращої освітленості треба розмістити полум'я щонайнижче. Це невірно: при низькому положенні полум'я промені падають дуже косо. Підняти свічку так, щоб промені падали круто, - означає віддалити джерело світла. Найбільш вигідною для освітленості, очевидно, буде деяка середня висота полум'я над столом.

Підбір літератури

1. Оптика. Фотометрія.

1. Світловий потік.
2. Сила світла.
3. Освітленість.

2. Застосування похідної для дослідження функцій.

1. Точки екстремуму функції.
2. Найбільше (найменше) значення функції.

СВІТЛОВИЙ ПОТІК

Кількість енергії світла, що проходить через дану поверхню за одиницю часу і оцінюється за зоровим відчуттям, називається світловим потоком Φ .

За одиницю світлового потоку приймається
1 люмен (лм)

Сила світла

Величину, що вимірюється світловим потоком в одиниці тілесного кута, називають **силою світла**.

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}$$

За одиницю сили світла прийнято — **1 канделу**.

Освітленість

Величину, яка вимірюється відношенням світлового потоку Φ , що падає на поверхню площею S , до цієї площі, називають *освітленістю* E :

$$E = \frac{\Phi}{S}$$

За одиницю освітленості приймають в СІ
люкс (лк).

Освітленість

Освітленість поверхні точковим джерелом прямо пропорційна силі світла джерела, косинусу кута падіння променів і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела до поверхні:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos \alpha$$

Точки екстремуму функції

Якщо x_0 - точка екстремуму, то

$$f'(x_0) = 0$$

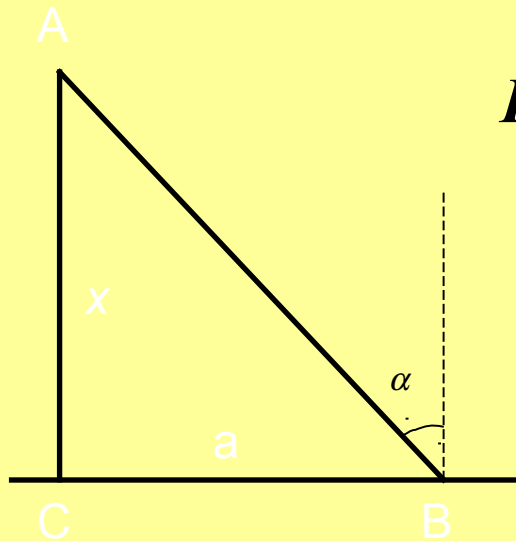
або

$$f'(x_0) \text{ не існує.}$$

Екстремуми функції

Якщо функція $f(x)$ на проміжку має лише одну точку екстремуму $x = a$ і якщо це точка максимуму, то $f(a)$ – найбільше значення функції на даному проміжку. А якщо $x = a$ – точка мінімуму, то $f(a)$ – найменше значення функції на даному проміжку.

Найяскравіше освітлення



Позначимо висоту полум'я над столом через x . Відстань BC монети B до основи C перпендикуляра, що проходить через полум'я A , позначимо через a .

Відомо, що освітленість поверхні точковим джерелом прямо пропорційна силі світла джерела, косинусу кута падіння променів і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела до поверхні. Тому освітленість монети згідно законів оптики дорівнює:

$$E = \frac{I}{R^2} \cos \alpha$$



За т. Піфагора $AB^2 = a^2 + x^2$.

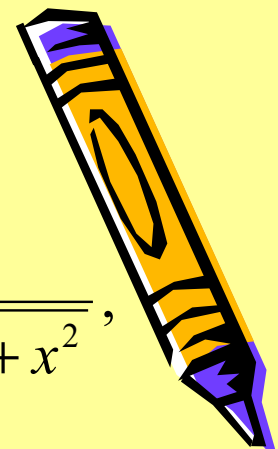
Тому $E(x) = \frac{I \cdot \cos \alpha}{a^2 + x^2}$. *Так як* $\cos \alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$,

то освітленість $E(x)$ як функція незалежної змінної x набуде вигляду:

$$E(x) = \frac{I}{a^2 + b^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$E(x) = \frac{I \cdot x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Дослідимо цю функцію на максимум.



Знайдемо критичні точки:

$$E'(x) = I \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^3},$$

$$E'(x) = I \cdot \frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + a^2 - 3x^2)}{(x^2 + a^2)^3} = I \cdot \frac{a^2 - 2x^2}{(x^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}},$$

то розв'язавши рівняння $a^2 - 2x^2 = 0$, знайдемо єдину критичну

точку: $\frac{a}{\sqrt{2}}$, яка належить інтервалу $(0; +\infty]$.

Знак похідної визначається знаком виразу $a^2 - 2x^2$.



Визначимо знак похідної на інтервалах:

$$\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right) - E'(x) > 0;$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; +\infty\right) - E'(x) < 0.$$

А це означає, що $\frac{a}{\sqrt{2}}$ - точка максимуму.

Оскільки вона – єдина точка максимуму, то в ній функція набуває найбільшого значення.

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx \frac{a}{1,4} \approx 0,71a$$



Висновок

Монета освітлюється найяскравіше, коли джерело світла перебуває на висоті 0,71 відстані від монети до проекції джерела світла. Знання цього співвідношення допомагає при облаштуванні найкращого освітлення робочого місця.