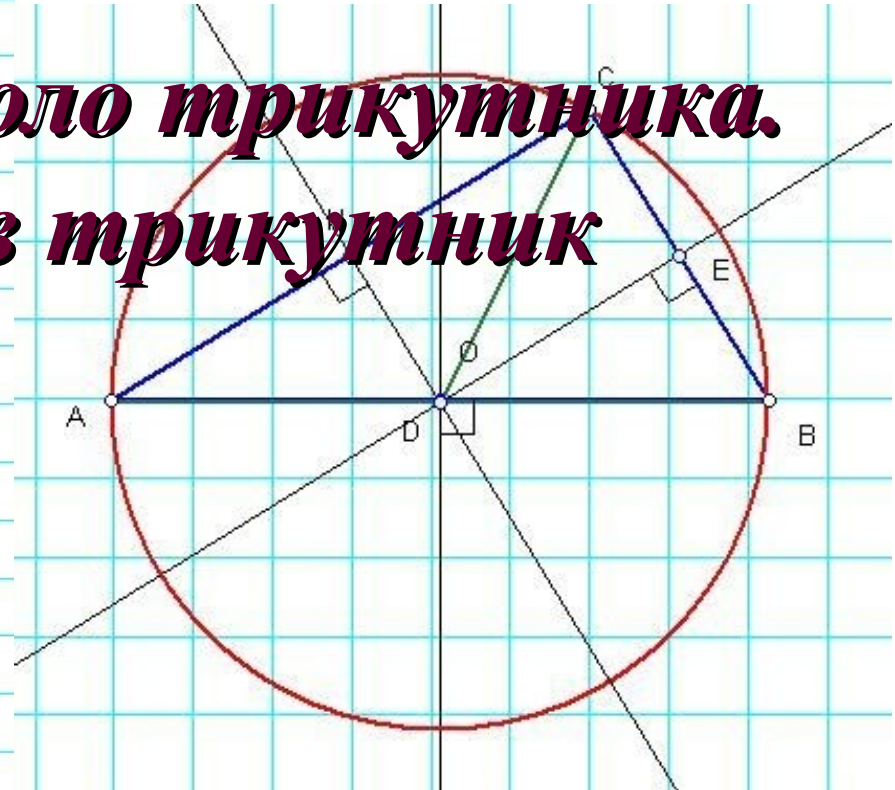
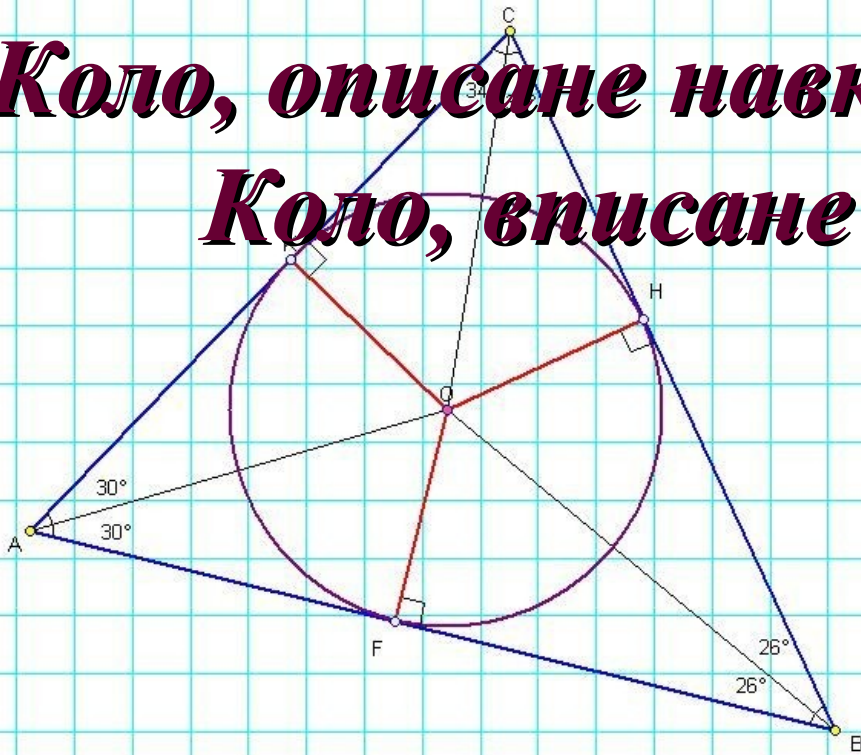
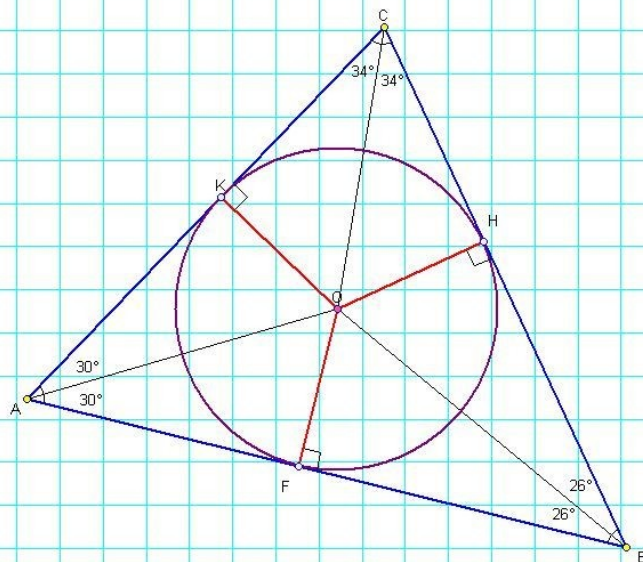


Коло, описане навколо трикутника. Коло, вписане в трикутник



*«Серед рівних розумом - за однакових умов –
переважає той, хто знає геометрію»*

Блез Паскаль

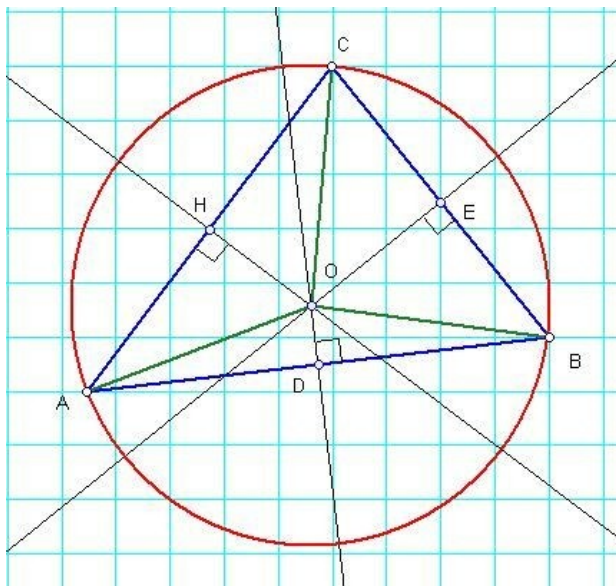


Коло називається вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

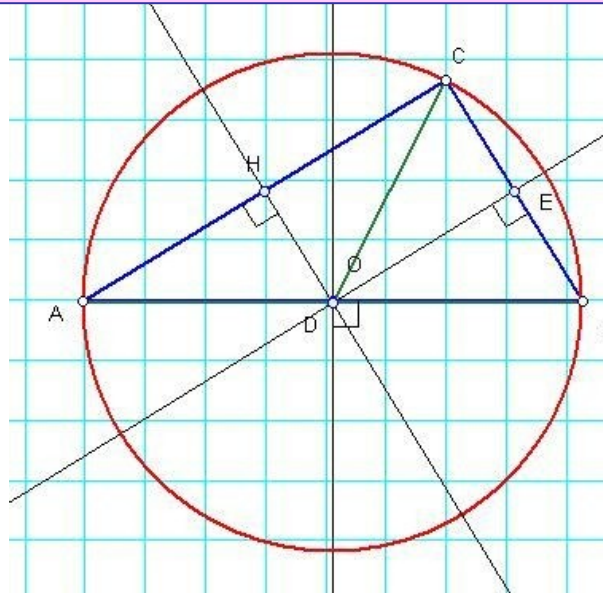
Центром вписаного у трикутник кола є точка перетину його бісектрис. Центр вписаного кола знаходиться всередині трикутника.

Коло називається описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

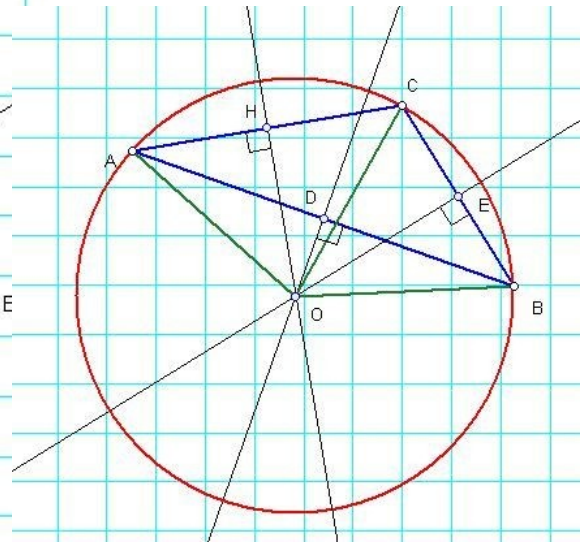
Центром описаного навколо трикутника кола є точка перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін.



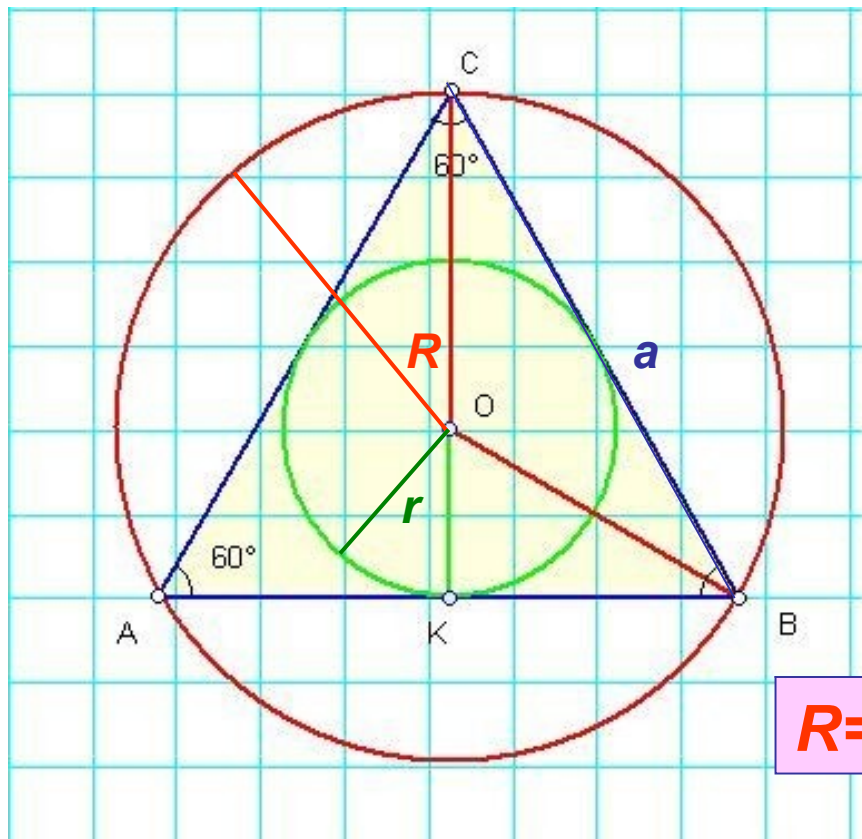
Гострокутний трикутник



Прямокутний трикутник



Тупокутний трикутник



Для рівностороннього трикутника
Радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}, \text{ сторона трикутника } a = \sqrt{3} \cdot R$$

Радіус кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}, \text{ сторона трикутника } a = 2\sqrt{3} \cdot r$$

Площа рівностороннього трикутника

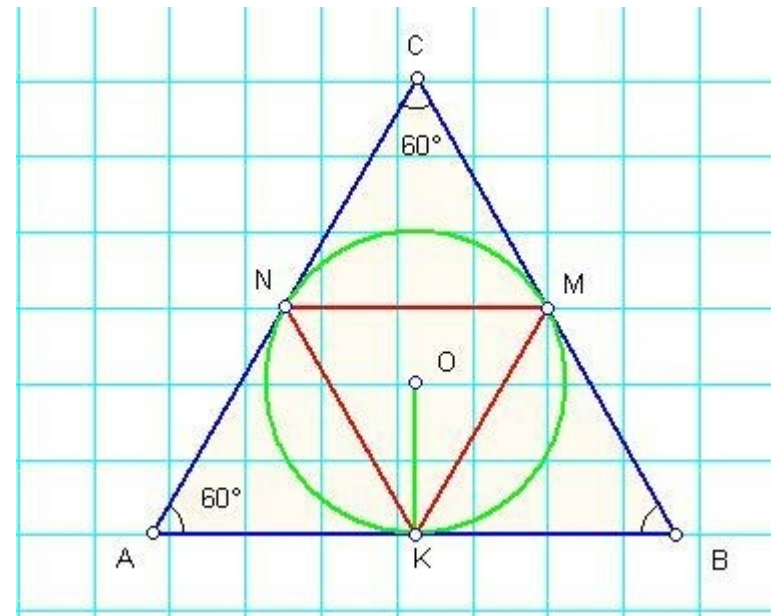
$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ де } a - \text{сторона трикутника}$$

Варіант 29. Завдання 2.6

Як відноситься сторона правильного трикутника, вписаного в коло, до сторони правильного трикутника, описаного навколо цього кола?

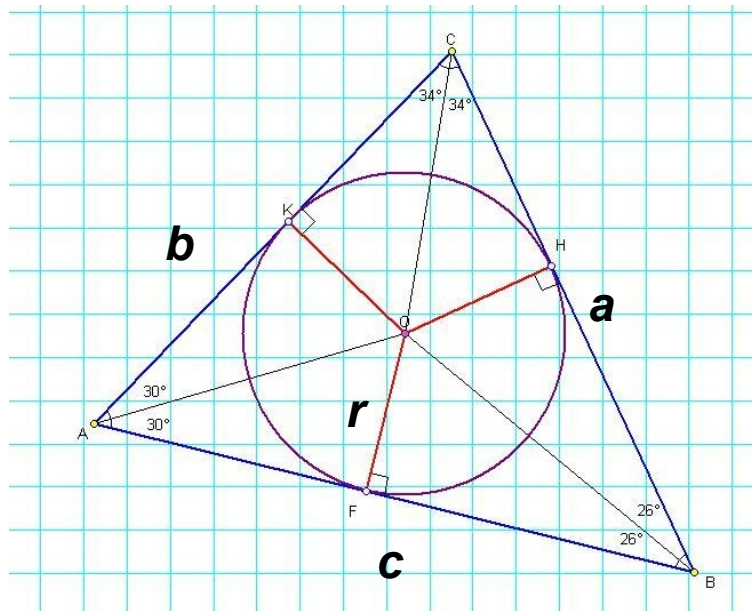
Для ΔABC коло є вписаним,
а для ΔMNK коло є описаним

$$NM : AB = 1 : 2$$




$$R = \frac{c}{2}, \text{ де } c - \text{гіпотенуза}$$
$$r = \frac{a+b-c}{2}, \text{ де } a, b - \text{катеты}$$
$$AC + BC = AB + 2r$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2}ac \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$



Для довільного трикутника

радіус кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad R = \frac{abc}{4S_{\Delta}}$$

радіус кола, вписаного в трикутник

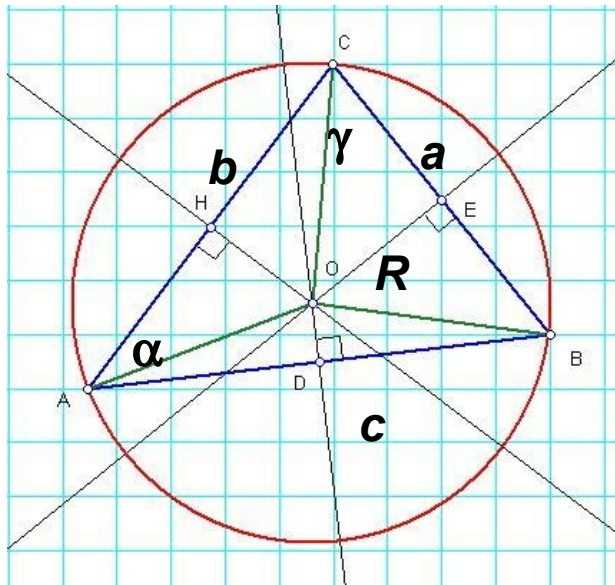
$$r = \frac{2S_{\Delta}}{a+b+c}$$

Площа трикутника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r = \frac{1}{2}ah_a;$$

за формулою Герона

$$S_{\Delta} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \quad \text{де } p = \frac{a+b+c}{2}$$



Перевірка діагностичного тесту

Варіант 1

Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь, та позначте її у бланку відповідей.

- Де знаходиться центр кола, вписаного у трикутник? В
 А) на перетині медіан; Б) на перетині серединних перпендикулярів;
 В) на перетині бісектрис; Г) на перетині висот
- Де знаходиться центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника? А
 А) поза трикутником; Б) на середині катета;
 В) всередині трикутника; Г) на середині гіпотенузи
- Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 12 см ? В
 А) $12\sqrt{3}\text{ см}$; Б) $6\sqrt{3}\text{ см}$; В) $4\sqrt{3}\text{ см}$; Г) $2\sqrt{3}\text{ см}$
- Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною 18 см ? Г
 А) $18\sqrt{3}\text{ см}$; Б) $9\sqrt{3}\text{ см}$; В) $6\sqrt{3}\text{ см}$; Г) $3\sqrt{3}\text{ см}$
- Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $AB=6\sqrt{3}\text{ см}$, $\angle C=60^\circ$? А
 А) 6 см ; Б) 8 см ; В) 12 см ; Г) 16 см .
- Чому дорівнює площа трикутника, периметр якого становить 12 см , а радіус вписаного кола дорівнює 4 см ? В
 А) 12 см^2 ; Б) 16 см^2 ; В) 24 см^2 ; Г) 48 см^2 .

Варіант 2

Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь, та позначте її у бланку відповідей.

- Де знаходиться центр кола, описаного навколо трикутника? Б
 А) на перетині медіан; Б) на перетині серединних перпендикулярів;
 В) на перетині бісектрис; Г) на перетині висот
- Де знаходиться центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника? Г
 А) поза трикутником; Б) на середині катета;
 В) всередині трикутника; Г) на середині гіпотенузи
- Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 18 см ? Б
 А) $12\sqrt{3}\text{ см}$; Б) $6\sqrt{3}\text{ см}$; В) $4\sqrt{3}\text{ см}$; Г) $2\sqrt{3}\text{ см}$
- Чому дорівнює радіус кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною 12 см ? А
 А) $2\sqrt{3}\text{ см}$; Б) $6\sqrt{3}\text{ см}$; В) $4\sqrt{3}\text{ см}$; Г) $3\sqrt{3}\text{ см}$
- Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC , якщо $AB=16\sqrt{3}\text{ см}$, $\angle C=60^\circ$? Г
 А) 6 см ; Б) 8 см ; В) 12 см ; Г) 16 см .
- Чому дорівнює площа трикутника, периметр якого становить 16 см , а радіус вписаного кола дорівнює 2 см ? Б
 А) 12 см^2 ; Б) 16 см^2 ; В) 24 см^2 ; Г) 48 см^2 .

Варіант 80. Завдання 2.6

Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 18 см, а радіус описаного навколо нього кола - 15 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

Розв'язання.

У трикутнику ABC $AO=BO=CO=15$ см як радіуси описаного кола

У рівнобедреному трикутнику ABC $AC=BC$, основа $AB=18$ см

Висота CD лежить на серединному перпендикулярі до основи AB, тому $AD=BD=0,5 \cdot AB=0,5 \cdot 18 \text{ см}=9 \text{ см}$

З трикутника OBD за наслідком з теореми Піфагора :

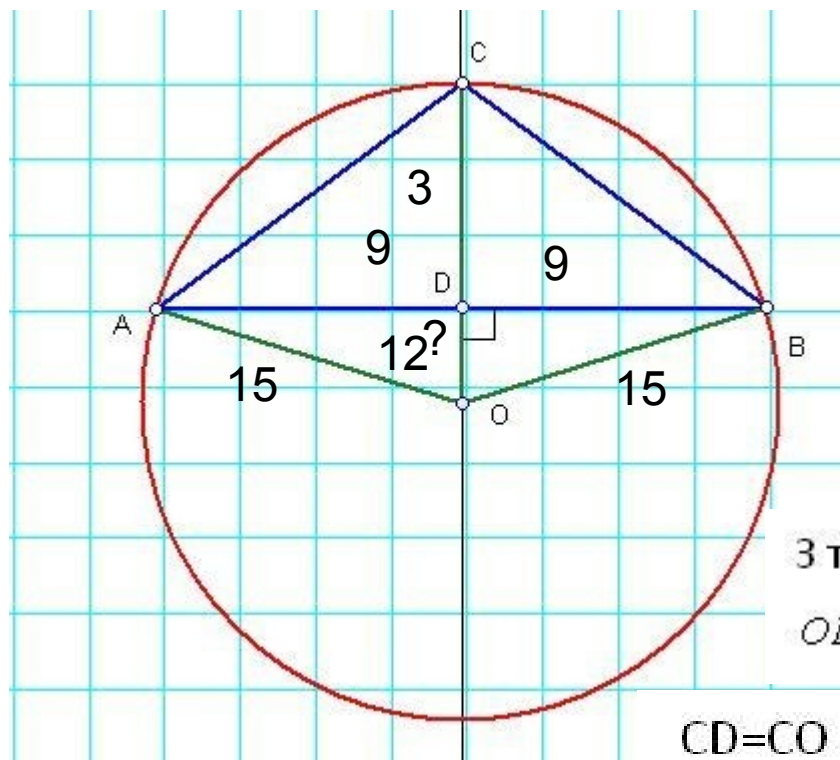
$$OD = \sqrt{OB^2 - BD^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

$$CD = CO - DO = 15 - 12 = 3 \text{ (см)}$$

З трикутника CDB за теоремою Піфагора

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \text{ (см)}$$

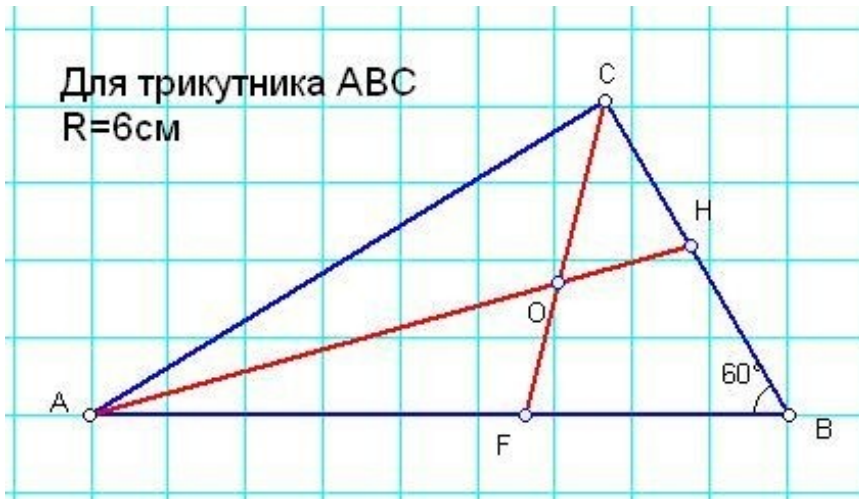
Відповідь: $3\sqrt{10}$ см



Варіант 37. Завдання 2.6

Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O – точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60^\circ$

Розв'язання.



У трикутнику ABC $AC = 2 \cdot R \cdot \sin 60^\circ$

У трикутнику AOC $AC = 2 \cdot R_1 \cdot \sin \angle AOC$

Маємо $\angle A + \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Маємо $\angle CAO + \angle ACO = 120^\circ : 2 = 60^\circ$

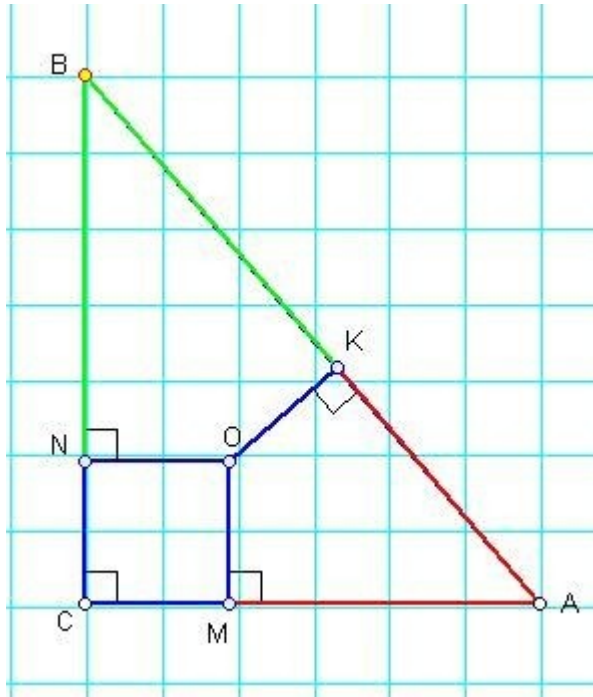
$$\angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Так як $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$, то $R_1 = R = 6 \text{ см}$

Відповідь: 6 см

Варіант 18. Завдання 3.4.

Вписане коло прямокутного трикутника ABC дотикається до гіпотенузи АВ у точці К. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо $AK = 4$ см, $BK = 6$ см.



Розв'язання.

За властивістю дотичних маємо: $AK = AM = 4$ см; $BK = BN = 6$ см.

Позначимо радіус вписаного кола через x : $CN = CM = NO = MO = x$.

Тоді $AC = (4+x)$ см, $BC = (6+x)$ см, $AB = 4$ см + 6 см = 10 см.

За теоремою Піфагора для трикутника ABC можна записати співвідношення: $(4+x)^2 + (6+x)^2 = 10^2$.

Розв'яжемо це квадратне рівняння.

$$16 + 8x + x^2 + 36 + 12x + x^2 = 100; \quad 2x^2 + 20x + 52 - 100 = 0;$$

$$2x^2 + 20x - 48 = 0; \quad x^2 + 10x - 24 = 0; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -10,$$

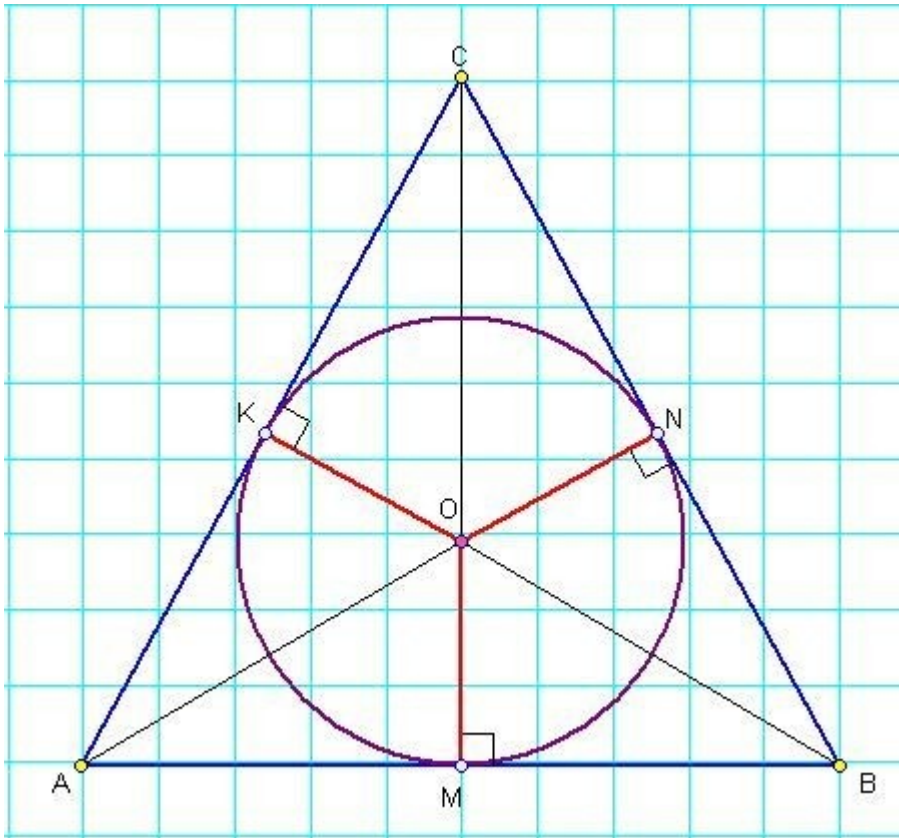
яке не задовольняє умову задачі.

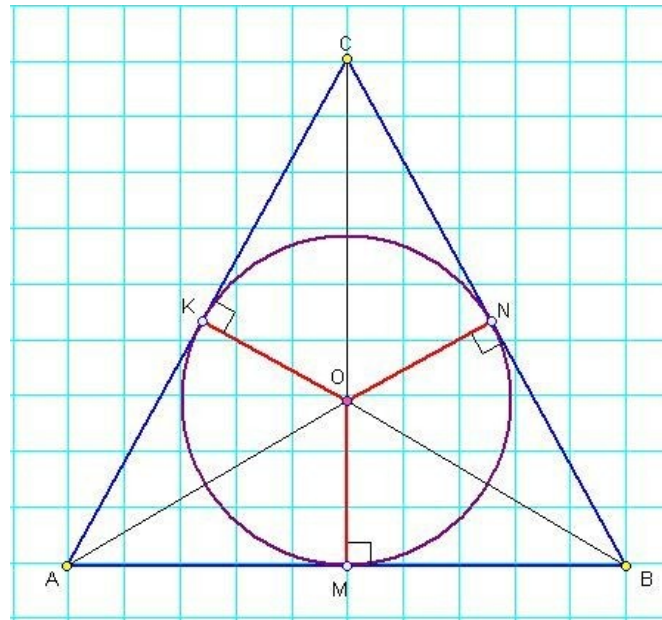
Відповідь: 2 см.

Варіант 9. Завдання 3.4

Бічна сторона рівнобедреного трикутника точкою дотику вписаного кола ділиться у відношенні $8 : 9$, рахуючи від вершини кута при основі трикутника.

Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.





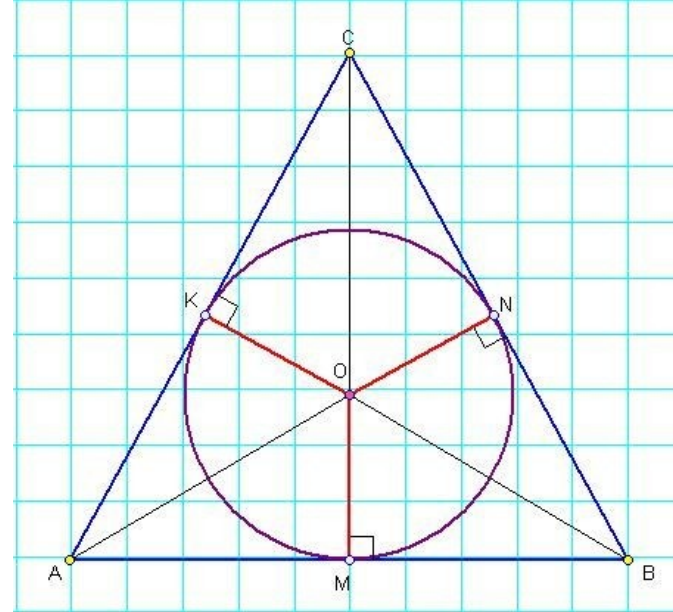
Розв'язання.

У трикутнику ABC $AC=BC$, відрізок CM – висота, точка O – центр вписаного кола. Оскільки $\triangle ABC$ – рівнобедрений, то точка O належить його висоті і бісектрисі CM , а відрізок OM – радіус вписаного кола.

За властивістю дотичних, враховуючи симетрію рівнобедреного трикутника, маємо: $AK=AM=BM=BN=8x$, $CK=CN=9x$.

За теоремою Піфагора для трикутника ABC можна записати співвідношення: $CM^2 + (8x)^2 = (8x+9x)^2 = (17x)^2$

Тобто $CM^2 + 64x^2 = 289x^2$, $CM^2 = 289x^2 - 64x^2 = 225x^2$, $CM = 15x$



Враховуючи те, що центр вписаного кола є точка перетину бісектрис, за властивістю бісектриси трикутника маємо: $\frac{CO}{OM} = \frac{CB}{MB} = \frac{9+8}{8} = \frac{17}{8}$.

Так як $OM=16$ см, то $CO = \frac{16 \cdot 17}{8} = 34$ см. $CM=16+34=50$ см.

З умови $15x = 50$ см отримаємо $x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$ (см). Основа трикутника

$$AB = 2 \cdot 8x = 16 \cdot \frac{10}{3} = \frac{160}{3} \text{ (см)}$$

$$\text{Площа трикутника } ABC \quad S = \frac{1}{2} AB \cdot CM = \frac{160 \cdot 50}{2 \cdot 3} = \frac{4000}{3} = 1333 \frac{1}{3} \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь: $1333 \frac{1}{3} \text{ см}^2$

Підсумок уроку. Домашнє завдання.

Розглянути хід розв'язку виконаних на уроці задач.

Розв'язати задачі 2.5 варіанту 36 та 3.4 варіанту 25.