Тернопіль 2014

Козбур Галина Євгенівна

вчитель математики

Многочлени від однієї змінної. Ділення многочленів

 для 8 класу

**Тема**. Многочлени від однієї змінної. Ділення многочленів

**Мета.** Дати означення многочлена стандартного вигляду, розвинути в учнів уміння і навички застосовування ділення кутом, методом невизначених коефіцієнтів, схеми Горнера для знаходження неповної частки і остачі від ділення многочлена на многочлен, розвивати логічне мислення; виховувати математичну культуру.

**Тип уроку**: пояснення нового матеріалу.

**Хід уроку**

1. **Організація класу**
2. **Актуалізація опорних занять**
* Що називають алгебраїчним виразом ?

(Вираз, що містить знаки дій +, -, $×÷$, до раціонального степеня та символ знаходження модуля, називається алгебраїчним виразом).

* Чи є відмінність між раціональним виразом і алгебраїчним ?

(Раціональний вираз, це алгебраїчний вираз, що не містить знаку дії добування кореня і взяття модуля із виразу зі змінною).

* Який вираз називається трансцендентним ?

(Якщо у виразі є крім +, -, $×$, $÷$ знаки і символи інших функцій (піднесення до ірраціонального степеня, взяття синуса, косинуса від змінної), то такий вираз називають трансцендентним).

* Які вирази називаються тотожно рівними?

(Два вирази називають тотожно рівними на деякій множині, якщо значення цих виразів рівні при всіх значеннях змінних із даної множини).

* Як називають цю множину?

(Областю визначення або областю допустимих значень (ОДЗ)).

* Що таке степінь многочлена?

(Найвищий із степенів одночленів у записі даного многочлена).

* А що ж таке многочлен?

(Раціональний вираз, який не містить знаку дії ділення на вирази, в які входять змінні, називають цілим раціональним виразом або многочленом).

1. **Пояснення нового матеріалу**

Повідомляється учням тема уроку і його мета.

Будь-який многочлен n-го степеня (n є Z+) від однієї змінної можна записати у вигляді

$$Р\left(х\right)=а\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+…+a\_{1}x+a\_{0},$$

де аn, аn -1, …  а0 –деякі дійсні числа (коефіцієнти многочлена), причому $а\_{n}\ne 0$; Коефіціцієнти$ а\_{n} $і $а\_{0} $ називають відповідно його старшим коефіцієнтом і вільним членом. Якщо одночлени у многочлені впорядковані за спаданням степенів змінної, то таку форму запису многочлена називають канонічно і кажуть, що многочлен Р(х) є многочлен канонічного (стандартного) вигляду. Якщо многочлен n-го степеня, то можна позначити$ P\_{n}\left(x\right)$. Всякий многочлен нульового степеня можна записати у вигляді $Р\_{0}\left(х\right) $=$ а\_{0}$ і умова для нього повинна виконуватися так, що $а\_{0}\ne 0.$

Число 0 вважають многочленом і називають його нуль-многочленом.

* А як ви гадаєте, який степінь цього многочлена?

(невизначений)

* Як ви думаєте, коли два многочлени $Р\left(х\right)=х^{2}+2х+8$ і

$Q\left(х\right)=ах^{3}+bx^{2}+cx+d $будуть тотожно рівними на множині R? (а=0; b=1; c=2; d=8)

Як відомо, многочлени можна додавати, віднімати, множити.

* Що є результатом цих дій? (многочлен)

Розглянемо ділення многочленів.

Ділення буває з остачею, і ділення націло.

**Означення:** кажуть, що многочлен $Р\_{n}\left(х\right) $ ділиться націло на тотожно не рівний многочлен Q (x), якщо існує такий многочлен S(x), що для будь-якого x$ ϵ R виконується рівність $ Р(x)=Q(x)·S(x).

При діленні націло многочленів необхідно, щоб степінь діленого був не меншим від степеня дільника. Проте ця умова є достатньою.

* Чому? Наведіть приклад.

Многочлен x3 +1 не ділиться націло на многочлен x-1. Якби існував многочлен S (x) такий, що для будь-якого x$ ϵ$ R виконувалася рівність x3 + 1 = (x – 1)S( x ), то при x = 1 отримали б неправильну рівність 13 + 1 = 0. Якщо одне ціле не ділиться націло на інше, то можна розглядати ділення з остачею.

* Що означає поділити число a на b з остачею ?

Наприклад, 149=7·21+2.

**Теорема:** Для будь-якого многочлена $Р\_{n}\left(х\right) і многочлен Q\_{m}\left(x\right)$, який тотожно не дорівнює нулю, існує єдина пара многочленів $S\_{1}\left(x\right) і R\_{k}\left(x\right),$ щоб виконувалась рівність:

$$P\_{n}\left(x\right)=Q\_{m}\left(x\right)∙S\_{1}\left(x\right)+R\_{k}(x)$$

де степінь многочлена $R\_{k}(x)$ менший степеня $Q\_{m}\left(x\right)$;

$P\_{n}\left(x\right)$ – ділене;

$Q\_{m}\left(x\right)$ – дільник;

$S\_{1}\left(x\right)$ – неповна частка;

$R\_{k}\left(x\right)$ – степінь многочлена з остачею.

Якщо $R\_{k}(x)$ є нуль-многочленом, то кажуть, що многочлен $P\_{n}\left(x\right)$ ділиться націло на многочлен $Q\_{m}\left(x\right)$ і записують $P\_{n}\left(x\right):Q\_{m}\left(x\right)$.

Основними способами для знаходження неповної частки і остачі від ділення многочлена на многочлен є:

1. ділення кутом;
2. метод невизначених коефіцієнтів;
3. схема Горнера.
4. **Ділення кутом**:

Пошук частки від ділення двох многочленів можна здійснювати за алгоритмом ділення «куточком», аналогічно тому, як це роблять при діленні чисел.

Приклад 1.

Поділити $2х^{3}+3х^{2}-х^{2}+х+2х+1$на $х^{2}+х+2$

(пояснення вчителя)

|  |
| --- |
| $$\frac{х^{2}+х+2}{2х+1}$$ |

\_$2х^{3}+3х^{2}-х+1$

$$ 2х^{3}+2х^{2}+4х$$

 \_$х^{2}-5х+1$

$$ х^{2}-х+2 $$

$$ -6х+(-1)$$

* Чи можна продовжувати ділити? (ні)
* Чому? (Учні роблять висновок).

Отже, $2х^{3}+3х^{2}-х+1=\left(х^{2}+х+2\right)\left(2х+1\right)+(-6х-1)$

Приклад 2.

Поділити Р(х):Q(х), якщо Р(х)=$х^{6}-х+1$, Q(х)=$х^{3}-х+1$

(учень біля дошки)

|  |
| --- |
| $$\frac{х^{3}-х+1}{х^{3}+х-1}$$ |

 \_$х^{6}-х+1$

$$ х^{6}-х^{4}+х^{3}$$

 \_$х^{4}-х^{3}-х$

$$х^{4}-х^{2}+х $$

$$-х^{3}+х^{2}-2х$$

$$-х^{3}+х-1 $$

$$ х^{2}-3х-1$$

P(x)=Q(x)($х^{3}-х+1$)+($х^{2}-3х-1$).

$R\_{2}\left(x\right)=х^{2}-3х-1$ – остача. Степінь остачі менший від степеня дільника.

1. **Метод невизначених коефіцієнтів**

Вчитель. Суть методу проілюструю на прикладі.

Наприклад: поділити $х^{3}-3х+4 на х-2.$ Частку від ділення будемо шукати у вигляді многочлена 2-го степеня $ab^{2}+bc+c.$ Остачею повинен бути многочлен, степінь якого менший від степеня дільника, тобто d. Невідомі коефіцієнти знайдемо з тотожності $х^{3}-3х+4=\left(х-2\right)\left(ab^{2}++bc+c\right)+d,$ розкривши дужки в правій частині і згрупувавши коефіцієнти при однакових степенях змінної х отримаємо:$ х^{3}-3х+4=aх^{3}++\left(b-2a\right)x^{2}+\left(c-2b\right)x+d-2c.$

$a=1,$

$b-2a=0, $ a=1; b=2; c=1; d=6.$c-2b=-3,$

$d$−2c=4

Отже, $х^{3}-3х+4=\left(х-2\right)\left(х^{2}+2х+1\right)+6$.

Пропоную учням самим скласти алгоритм ділення многочленів методом невизначених коефіцієнтів.

Учні «ланцюжком» формулюють та записують алгоритмічний припис.

**Запишемо алгоритм ділення многочленів методом невизначених коефіцієнтів:**

1. Записати многочлен-частку з відомим старим коефіцієнтом.
2. Записати остачу (степінь менший від степеня дільника).
3. Записати тотожну рівність.
4. Звести подібні члени в правій частині рівності.
5. Прирівняти коефіцієнти при однакових степенях у лівій і правій частині рівності.
6. Розв’язати систему.
7. Записати частку.
8. Записати остачу.

Приклад. ( Робота в парах).

Поділити методом невизначеих коефіцієнтів 2x3 - 5x + 3 на x – 1.

Відповідь: 2x3 - 5x + 3=(x – 1)(2x2 +2x – 3).

* З якими труднощами ви зустрілись при розв’язанні цього прикладу?

У многочлені (діленому) відсутній одночлен із степенем 2. Який біля нього стоїть коефіцієнт? (0).

Вільям Джордж Горнер (Вільям Джордж Горнер народився в 1786 році в місті Бристоль в Англії. Отримав освіту в Кінгствудській школі Бристоля. У віці 14-ти років він став помічником директора в Кінгствудській школі й директором 4 роки після того. Він поїхав з Бристоля и заснував свою власну школу в [1809](http://uk.wikipedia.org/wiki/1809) році в [Баті](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%91%D0%B0%D1%82_%28%D0%A1%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%80%D1%81%D0%B5%D1%82%29).

Основні праці з [алгебри](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0). У [1819](http://uk.wikipedia.org/wiki/1819) р. опублікував спосіб наближеного обчислення дійсних [коренів](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%80%D1%96%D0%BD%D1%8C_%D1%84%D1%83%D0%BD%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97) [многочлена](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD), який називається тепер [способом Руффіні-Горнера](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%83%D1%84%D1%84%D1%96%D0%BD%D1%96-%D0%93%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4) (цей спосіб був відомий [китайцям](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B8%D1%82%D0%B0%D0%B9) ще в [XIII](http://uk.wikipedia.org/wiki/XIII) ст.). Робота була надрукована у Філософських роботах Королівського наукового співтовариства.

В [XIX](http://uk.wikipedia.org/wiki/XIX) — на початку [XX](http://uk.wikipedia.org/wiki/XX) століття метод Горнера займав значне місце в англійських і американських підручниках з [алгебри](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0). [Де Морган](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9E%D0%B3%D0%B0%D1%81%D1%82%D0%B5%D1%81_%D0%B4%D0%B5_%D0%9C%D0%BE%D1%80%D0%B3%D0%B0%D0%BD&action=edit&redlink=1) показав широкі можливості методу Горнера в своїх роботах.

Ім’ям Горнера названа [схема розподілу многочлена](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D1%85%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%93%D0%BE%D1%80%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0) на [двочлен](http://uk.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%94%D0%B2%D0%BE%D1%87%D0%BB%D0%B5%D0%BD&action=edit&redlink=1) X–A.

Горнер помер 22 вересня 1837 року.

1. **Схема Горнера**

Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів при ділення многочлена на двочлен х-с, де с – деяке число.

Нехай поділимо многочлен $Р\_{n}\left(x\right)=a\_{n}x^{n}+a\_{n-1}x^{n-1}+..+b\_{1}x+a\_{0}, $а остачею буде деяке число R, $ S\_{n-1}\left(x\right)$ -неповна частка, то

$P\_{n}\left(x\right)=\left(x-c\right)S\_{n-1}\left(x\right)+R$. Розкриємо дужки в правій частині та зводимо подібні доданки.

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях змінної х у лівій і правій частині рівності та отримаємо:

$$a\_{n}=b\_{n-1 }; a\_{n-1}=b\_{n-2}-cb\_{n-1};$$

$$ a\_{n-2}=b\_{n-3}-cb\_{n-2}…$$

$$a\_{1}=b\_{0}-cb\_{1}; a\_{0}=R-cb\_{0}.$$

Звідси: $b\_{n-1}=a\_{n}$

$$b\_{n-2}=cb\_{n-1}+a\_{n-1}$$

$$b\_{n-3}=cb\_{n-2}+a\_{n-2}$$

……………………………….

$$b\_{0}=cb\_{1}+a\_{1};R=cb\_{0}+a\_{0}$$

Обчислення за цими формулами зручно записувати у вигляді таблички, названої на честь англійського математика Джорджа Горнера (1786-1837) схемою Горнера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | $$a\_{n}$$ | $$a\_{n-1}$$ | $$a\_{n-2}$$ | ….. | $$a\_{1}$$ | $$a\_{0}$$ |
| С | $$b\_{n-1}=a\_{n}$$ | $$b\_{n-2}==cb\_{n-1}+a\_{n-1}$$ | $$b\_{n-3}==cb\_{n-2}+a\_{n-2}$$ |  | $$b\_{n-2}==cb\_{1}+a\_{1}$$ | $$b\_{n-2}==cb\_{0}+a\_{0}$$ |

Обов’язково, щоб многочлен був записаний в стандартному вигляді.

У цій схемі кожне число другого рядка, починаючи з другого стовпчика, є сумою попереднього числа, помноженого на с, і числа, що розміщене над ним.

**Приклад**.

 Знайти неповну частку та остачу від ділення многочлена $х^{5}-4х^{4}++3х^{3}-х-5 на х-2.$

Виконаємо ділення за схемою Горнера.

Пояснення вчителя. У верхньому рядку розставляємо коефіцієнти діленого. (Якщо в ньому не вистачає якогось члена, то замість коефіцієнта ставимо 0).

Цифру в другому стовпчику, що відповідає першому коефіцієнту просто зносимо вниз.

Множимо число з першого стовпчика на число із другого і додаємо коефіцієнт із наступного.

Множимо число із першого стовпчика на число, що вийшло в попередній дії (третій стовпчик) й додаємо до цього коефіцієнт з наступного стовпчика.

За аналогією знаходимо число для останнього стовпчика.

(Число в останньому стовпчику - це остача).

Виконаємо ділення за схемою Горнера.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -4 | $$3$$ | 0 | -1 | -5 |
| 2 | $$1$$ | 2·1+(-4)= -2 | (-2)·2+3= -1 | 2·(-1)+0)= -2 | $$-5$$ | $$-15$$ |

Остача: R=-15

Неповна частка: $х^{4}-2х^{3}-х^{2}-2х-5$.

1. **Закріплення умінь і навичок**

*Приклад.*

Знайдіть числа a і b з тотожної рівності:

а) $2х^{3}-8х^{2}+9х-х=\left(х-3\right)\left(2х^{2}-ax+b\right)=$

$$=2x^{3}+ax^{2}+bx-6x^{2}-3ax-3b=$$

$$=2x^{3}+\left(a-6\right)x^{2}+\left(b-3a\right)x-3b.$$

a-6=-8,

b-3a=9,

3b=9

-2-6=-8

b=3

3-3a=9

-3a=6

a=-2

Відповідь: a=-2, b=3

б) $2х^{4}+5х^{3}+3х^{2}-2х-8=\left(х^{2}+х-2\right)\left(2х^{2}+ax+b\right)=$

$$=2x^{4}+ax^{3}+bx^{2}+2x^{3}+ax^{2}+bx+(-4x^{2}-2ax-2b=$$

$$=2x^{4}+\left(a+2\right)x^{3}+\left(b+a-4\right)x^{2}+\left(b-2a\right)x-2b.$$

a+2=5, a=3, a=3,

b+a-4=3, 4+3-4=3, b=4.

b-2a=-2, 4-2a=-2,

2b=8; b=4;

Відповідь: a=3, b=4.

*Приклад.*

в)$Р\left(х\right)=2x^{6}-3x^{4}-x^{3}+^{1}/\_{2}x^{2}-2x-5$

Q(x)=$x^{3}-2x^{2}-3x-4$

|  |
| --- |
| $$\frac{x^{3}-2x^{2}-3x-4}{2x^{3}-4x^{2}+11x+41}$$ |

\_$2x^{6}-3x^{4}-x^{3}+^{1}/\_{2}x^{2}-2x-5$

$$ 2x^{6}-4x^{5}-6x^{4}-8x^{3}$$

 \_$4x^{5}+3x^{4}+7x^{3}$

$$4x^{5}-8x^{4}-12x^{3}-16x^{2}$$

 \_$11x^{4}+19x^{3}+^{1}/\_{2}x^{2}+16x^{2}-2x$

$$11x^{4}-22x^{3}-33x^{2}-44x $$

\_$41x^{3}+49^{1}/\_{2}x^{2}+42x-5$

$$41x^{3}-82x^{2}-123x-164 $$

 $131^{1}/\_{2}x^{2}+165x+159$

$P\left(x\right)=Q\left(x\right)·\left(2x^{3}-4x^{2}+11x+41\right)+(131^{1}/\_{2}x^{2}+165x+159)$.

*Приклад. (самостійно)*

 Знайти неповну частку та остачу, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

б) $P\left(x\right)=2x^{4}+3x-4$ $Q\left(x\right)=x^{2}-1$

$P\left(x\right)=\left(x^{2}-1\right)\left(ax^{2}+bx+c\right)+\left(dx+L\right)$

$$2x^{4}+3x-4=ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+(-ax^{2)}-bx-c+dx+L=$$

$$ax^{4}+bx^{3}+\left(c-a\right)x^{2}+\left(d-b\right)x+\left(L-c\right).$$

a=2, a=2,

b=0, b=0,

c-a=0 c=0,

d-b=3, d=3,

L-c=-4, L=-4

Відповідь:

$2x^{2}$ – неповна частка

3х-4 – остача.

*Приклад.*

Користуючись схемою Горнера, знайти остачу від ділення многочлена на двочлен:

 $Р\left(х\right)=х^{4}-3х^{3}+6х^{2}-10х+16 на х-4$

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -3 | 6 | -10 | 16 |
| 4 | 1 | 1 | 10 | 30 | 136 |

R=136 – остача

$x^{3}+x^{2}+10x+30$ – неповна частка.

1. **Завдання додому**

Вивчити § 7, п. 44 ст. 314- 316.

Розв’язати № 44.2 (2), 44.4, 44.3. (1 - методом невизначених коефіцієнтів).

1. **Підсумок уроку**
* Що нового дізнались і чому навчились на сьогоднішньому уроці?
* З якими методами ділення ви познайомились?
* Яка необхідна умова ділення многочленів націло?
* Який многочлен є многочленом канонічного вигляду?
* Коли краще застосовувати схему Горнера?