Тернопіль 2014

Козбур Галина Євгенівна

вчитель математики

Розв’язування раціональних рівнянь, які зводяться до квадратних

для 8 класу

**Тема:** Розв’язування раціональних рівнянь, які зводяться до квадратних

**Мета:** Розвинути в учнів уміння і навички розв’язувати рівняння, зводячи їх до квадратних, розвивати мислення, виховувати культуру математичних міркувань та записів.

**Тип уроку:** засвоювання нових знань.

**Обладнання:** картки різного кольору, таблиця.

**Хід уроку**

**І. Організація класу**

**ІІ. Актуалізація опорних знань і умінь учнів**

– Дати означення квадратного рівняння?

(Рівняння виду *ax2+вx+c=0* називають квадратним рівнянням, якому х- змінна *a, в, c,* – деякі числа, причому а ≠ 0)

– Що називають коренем рівняння?

(Коренем (або розв’язком) рівняння називають значення змінної, при якому це рівняння перетворюється у правильну числову рівність)

– Від чого залежить кількість коренів у квадратичному рівнянні?

(Від дискримінанта)

– Що називається дискримінантом?

(Вираз *D=b2-4ac*) («дискримінант» – у перекладі з латинської – розрізнювач)

– Сформулюйте теорему Вієта.

(Якщо *x1 і x2* – корені квадратного рівняння *ax2+вx+c=0*, то *x1+x2=*$-\frac{в}{а}$*; x1·x2=*$\frac{c}{a}$)

(Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену)

– Записати зведене квадратне рівняння і теорему Вієта?

*x2 + px+q=0* $\left\{\begin{matrix}x\_{1}+x\_{2}= -p\\x\_{1}∙x\_{2}=q\end{matrix}\right\}$

– Записати формулу коренів квадратного рівняння.

($x\_{1,2}=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$)

**ІІІ. Мотивація навчання**

Ми з вами навчилися розв’язувати квадратні рівняння. Опираючись на них, ми можемо розв’язати і інші рівняння, степінь яких вищий від двох.

– Що ви хотіли б навчитися на сьогоднішньому уроці?

(Познайомитися з іншими типами рівнянь і способами їх розв’язання).

**IV. Пояснення нового матеріалу.**

Приклад 1

Розглянемо рівняння 2x4-9x2+4=0

– Яке рівняння воно нагадує? (квадратне відносно x2)

 2(х2)2-9x2+4=0.

Як розв’язати це рівняння? ( учні пропонують способи розв’язку)

Воно разв’язується заміною змінної. Нехай х2=t, тоді х4=t2. Маємо рівняння: 2t2-9t+4=0

D= 81-4·4·2=81-32=49

t1=$\frac{(9+7)}{4}$=4; t2=$\frac{(9-7)}{4}$=$\frac{1}{2}$.

Повертаємось до попередньої змінної. Якщо t=4, тоді х2=4. $\left[\begin{array}{c}x\_{1}=2\\x\_{2}=-2\end{array}\right.$

Якщо t = $\frac{1}{2}$, тоді х2 = $\frac{1}{2}$. $\left[\begin{array}{c}x\_{3}=\frac{1}{\sqrt{2}} \\x\_{4}=- \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.$

Відповідь: х = $\left\{- \frac{1}{\sqrt{2}}; -2; \frac{1}{\sqrt{2}};2\right\}$

– Скільки найбільше коренів може мати рівняння такого типу? (4)

Формулювання означення.

**Означення**: Рівняння виду *aх4-вx2+c=0,* де *а≠0*, називають біквадратним рівнянням.

(Біквадратний – четвертий степінь числа)

– Наведіть приклади біквадратних рівнянь і запишіть на дошці. (А тепер самостійно розв’яжіть) *x4-10x2+9=0*

Нехай х2=y, тоді х4=y2. Маємо рівняння: y2-10y+9=0

D= 100-4·9·1=100-36=64

t1=$\frac{10+8}{2}$=9; t2=$\frac{10-8}{2}$=$1$. $\left[\begin{array}{c}y\_{1}=9,\\y\_{2}=1\end{array}\right.$

Повертаємось до попередньої змінної. Якщо y=9, тоді х2=9. $\left[\begin{array}{c}x\_{1}=3,\\x\_{2}=-3\end{array}\right.$.

Якщо y=1, тоді х2 =1. $\left[\begin{array}{c}x\_{3}=1,\\x\_{4}=-1.\end{array}\right.$

Відповідь: х = $\left\{-3;-1;1;3\right\}$

Приклад 2.

*x4 - 3x2 - 4=0*;

Заміна: х2 = t, тоді х4 = t2. t2 - 3t - 4=0 $\left[\begin{array}{c}t\_{1}=4,\\t\_{2}=-1.\end{array}\right.$

х2 = 4 х1 = 2 х2 = - 1

 х2 = -2 немає коренів

Відповідь: -2;2.

Учні роблять висновки. Такий спосіб розв’язування рівнянь називають методом заміни змінної.

Приклад. Розглянемо таке рівняння : *(х2-5х)2-4(х2-5х)-12=0*

– Яким ви способом будете розв’язувати таке рівняння?

Нехай *х2-5х=а,* тоді *(х2-5х)2=а2.* Одержимо рівняння: а2-4а-12=0; а1=-2; а2=6.

Якщо *а=-2,* то *х2-5х=-2*

*D=17;* $x\_{1,2}=\frac{5\pm \sqrt{17}}{2}$

Якщо *а=6,* то *х2-5х=6;* *х2-5х-6=0;* *х3=6; х4=-1.*

Відповідь: $\frac{5\pm \sqrt{17}}{2}; -1;6.$

Приклад. Розв’язати рівняння (2х2 + 3х – 1)2 – 10х2 – 15х + 9 = 0

Запишемо це рівняння так: (2х2 + 3х – 1)2 – 10х2 – 15х + 5 + 4 = 0

(2х2 + 3х – 1)2 – 5(2х2 + 3х – 1) + 4 = 0

Нехай 2х2 + 3х – 1 = t. Тоді t2 – 5t + 4 = 0.

Звідси t1 = 1, t2 = 4.

Отже, 2х2 + 3х – 1 = 1 або 2х2 + 3х – 1 = 4.

*2х2 + 3х – 1 = 1;*  *х1 = -2; х2 =* $\frac{1}{2}$*.*

2х2 + 3х – 1 = 4; *х3 =* $-\frac{5}{2}$*; х4 = 1.*

Відповідь: *-2;* $\frac{1}{2}$*;*$ -\frac{5}{2}$*; 1.*

 Приклад. Розв’язати рівняння : x4 – 8x3 + 15x2 + 4x – 2 = 0.

Чи можна розв'язати рівняння методом розкладання на множники, використовуючи схему Горнера? Чому? (рівняння не має раціональних коренів).

Виділимо в лівій частині рівняння квадрат двочлена:

x4 – 8x3 + 16x2 – х2 + 4x – 2 = 0;

(х2 – 4x)2 – (х2 – 4x) – 2 = 0.

Зробивши заміну х2 – 4х = t, отримуємо рівняння t2 – t – 2 =0. $\left[\begin{array}{c}t=2\\t=-1\end{array}\right.$;

Звідси $\left[\begin{array}{c}x^{2}-4x=2,\\x^{2}-4x=-1\end{array}\right.$.

Відповідь: 2+$\sqrt{6}$; 2–$\sqrt{6}; 2+\sqrt{3}; 2–\sqrt{3}.$

Приклад. *(х+1)(х+3)(х+5)(х+7)=9.*

Розкривши дужки, звівши подібні доданки, розкладемо на множники, використавши один із методів, знайдемо корені рівняння. Цей процес тривалий і не раціональний.

При розв’язанні таких рівнянь потрібно знайти «вигідний» спосіб групування множників: (*(х+1)(х+7))((х+3)(х+5))=9*

*(х2+8х+7)( х2+8х+15)=9*

Нехай *х2 + 8х = а; (а+7)(а+15) = 9; а2 +22а + 96 = 0.*

*D=484-4·96·1=484-384=100;* $а\_{1}=\frac{-22+10}{2}=-\frac{12}{2}=-6; а\_{1}=\frac{-22-10}{2}=-\frac{32}{2}=-16;$

Отримаємо два рівняння: *х2 + 8х = -6 або х2 + 8х = - 16*

*х2 + 8х + 6 = 0 х2 + 8х +16 = 0*

$x\_{1,2}=\frac{-8\pm 2\sqrt{10}}{2}$*= –4±*$\sqrt{10}$ *(х+4)2 = 0*

 *х3,4 = ± 4*

Відповідь: *–4±*$\sqrt{10}$*; 4; -4.*

А чи можна іншим способом?

*ІІ спосіб.*

Нехай *х2 + 8х + 7 = y, y(y+8) = 9; y2 + 8y – 9 = 0; D = 64 + 36 = 100;*

*y1=1; y2 = -9. (1+8-9=0)*

Повернемось до попередньої змінної:*х2 + 8х +7 = 1 або х2 + 8х +7 = -9*

 *х2 + 8х +6 = 0 х2 + 8х + 16 = 0*

$x\_{1,2}= $*–4±*$\sqrt{10}$ *х3,4 = ± 4*

Відповідь: *–4±*$\sqrt{10}$*; 4; -4.*

*Учні роблять висновок.*

Якщо маємо рівняння *(х+а)(х+в)(х+с)(х+d)=f,* то а + *d = в + с.*

Приклад. Розв’язати рівняння (х – 1) х (х + 1) (х + 2) = 24.

При розв’язанні таких рівнянь потрібно знайти «вигідний» спосіб групування множників: ((х – 1)(х + 2)) (х(х+1)) = 24.

Маємо: (х2 + х – 2)(х2 + х) =24. Зробимо заміну: х2 + х = t.

Тоді: t (t – 2) =24; t2 – 2t – 24 = 0; t1 = -4, t2 = 6. Отримуємо:

$$\left[\begin{array}{c}х^{2}+х=-4,\\х^{2}+х=6.\end{array}\right.$$

Відповідь: -3; 2.

Приклад. Розв’язати рівняння (х + 3)4 + (х + 5)4 = 16

Заміна 1: y = $\frac{x + 3+x+5}{2}=x+4$

Але ми замінювали *y* через *х*, а нам потрібно *х* через y: *х = y – 4*

*(y - 1)4 + (y + 1)4 = 16;*

*((y – 1)2)2 + ((y + 1)2)2 = 16;*

*(y2 – 2y +1) + (y2 + 2y +1) = 16;*

*y4 + 4y + 1 + 2y2 + 4y3 – 4y + y4 + 4y2 + 1 + 2y2 + 4y3 – 4y = 16;*

 *y4 + 6y2 – 7 = 0.* Одержали біквадратне рівняння.

Заміна2: *y2 = t, y4 = t2; t2 + 6t – 7 = 0* $\left[\begin{array}{c}t=1\\t=-7.\end{array}\right.$

Якщо t = -7, то y2 = -7; коренів немає.

Якщо t = 1, то y2 = 1, y1 = 1, y2 = - 1.

Якщо y = 1, то х = y – 4; x1 = 1 – 4 = -3.

 Якщо y = -1, то x2 = -1 – 4 = -5

Відповідь: -5; -3.

Рівняння виду (x – a)4 + (x – в)4 = c, заміна t = x – $\frac{a+в}{2}$ завжди приводить до біквадратного рівняння відносно t.

Приклад. Розв’язати рівняння (робота в парах): (х + 1)4 + (х + 5)4 = 32.

Нехай t = x – $\frac{-1+(-5)}{2}$, тобто х = t – 3. Тоді х + 1 = t – 2, х + 5 = t + 2, а задане рівняння набуває вигляду:

(t – 2)4 + (t + 2)4 = 32.

Після піднесення до степеня і зведення подібних доданків отримуємо рівняння

t4 + 24t2 = 0. Звідси t = 0, а отже, х = -3.

Відповідь: -3.

Приклад. Розв’язати рівняння $7(х+\frac{1}{х}$) – 2($х^{2}+\frac{1}{х^{2}}$) = 9.

Нехай $х+\frac{1}{х}$ = t.

Тоді $(х+\frac{1}{х})^{2}$ = t2; $х^{2}+2+\frac{1}{х^{2}}= t^{2};$ $х^{2}+\frac{1}{х^{2}}= t$2 – 2.

Маємо:

7t – 2(t2 – 2) =9;

2t2 – 7t + 5 = 0.

Звідси: t1 = 1, t2 = $\frac{5}{2}$.

Отже, $х+\frac{1}{х}$ = 1 або $х+\frac{1}{х}$ = $\frac{5}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; 2.

**V. Домашнє завдання**

А.Г. Мерзляк та інші Алгебра 8 кл. Поглиблене вивчення математики

Вивчити §6, п. 37, розв’язати № 37.2(І ст.), 37.4(2), 37.13(2), 37.15(1).

 **VI. Підсумок уроку**

Ви познайомились з основними типами рівнянь. Навчилися розв’язувати кілька основних типів рівнянь, способом введення допоміжної змінної. Таким чином ми зводили їх до квадратних рівнянь.

– Чи є ще якісь запитання? Прошу після уроку покласти мені на стіл карточку кольору такого, на якому рівні ви засвоїли новий матеріал. На наступному уроці ми продовжимо розв’язувати рівняння і познайомимось з іншими типами рівнянь і способами їх розв’язання.