Тернопіль 2014

Козбур Галина Євгенівна

вчитель математики

Подільність многочленів. Розклад многочлена на незвідні множники. Кратність кореня многочлена

для 8 класу

**Тема.** Подільність многочленів. Розклад многочлена на незвідні множники. Кратність кореня многочлена

**Мета.** Розвинути в учнів уміння і навички розв’язування вправ на подільність многочлена. Дати означення незвідних множників. Розвивати вміння розкладати многочлени на незвідні множники і знаходити кратність кореня многочлена.

Тип уроку: пояснення нового матеріалу

**Хід уроку**

1. ***Організація класу***
2. ***Перевірка домашнього завдання***

***П*риклад 1.** Поділити многочлен на многочлен «куточком»:

$$P\left(x\right)=x^{4}-5x^{3}-6x^{2}+x+1$$

$$Q\left(x\right)=x^{2}+x+2$$

|  |  |
| --- | --- |
| $$x^{4}-5x^{3}-6x^{2}+x+1$$$$x^{4}-x^{3}-x^{2}+2x$$ | $$x^{2}+x+2$$ |
| $$x^{2}-6x-2$$ |
|  | $$-6x^{3}-8x^{2}+x$$$$-6x^{3}-6x^{2}-12x$$ |  |  |
|  | $$ -2x^{2}+13x+1$$$$-2x^{2}-2x-4$$ |  |  |
|  | $$ 15x+5$$ |  |  |

$x^{2}-6x-2$ – неповна частка.

$15x+5$ *–* остача.

$$x^{4}-5x^{3}-6x^{2}+x+1=\left(x^{2}+x+2\right)\left(x^{2}-6x-2\right)+(15x+5)$$

**Приклад 2. З**найти неповну частку та остачу від ділення многочлена на многочлен методом невизначених коефіцієнтів:

$$P\left(x\right)=x^{4}+x^{3}-3x^{2}-7x-6$$

$$Q\left(x\right)=x^{2}+2x-3$$

$$x^{4}+x^{3}-3x^{2}-7x-6=\left(x^{2}+2x-3\right)\left(ax^{2}+bx+c\right)+\left(dx+m\right)=$$

$$=ax^{4}+bx^{3}+cx^{2}+2x^{3}+2bx^{2}+2cx+\left(-3a\right)x^{2}-3bx-3c+dx+m=$$

$$=ax^{4}+\left(b+2\right)x^{3}+\left(c-2b-3a\right)x^{2}+\left(2c-3b+d\right)x+m-3c$$

$$\left\{\begin{array}{c}a=1,\\b+2=1,\\c-2b-3a=-3, ⟹\\2c-3b+d=-7,\\m-3c=-6,\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}a=1,\\b=-1,\\c=-3+2\left(-1\right)+3∙1=-2,\\2\left(-2\right)-3\left(-1\right)+d=-7, d=-6\\m=-6+3\left(-2\right)=-12.\end{array}\right.$$

$$x^{4}+x^{3}-2x^{2}-7x-6=\left(x^{2}-2x-3\right)\left(x^{2}-x-2\right)+(-6x-12)$$

$x^{2}-x-2$ – неповна частка.

$-6x-12$ – остача.

**Приклад 3.** Знайти остачу від ділення многочлена на двочлен:

$$P\left(x\right)=x^{5}-x^{3}+x-3$$

$$Q\left(x\right)=x+1$$

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 | -3 |
| -1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | -4 |

$$x^{5}-x^{3}+x-3=\left(x+1\right)\left(x^{4}-x^{3}+1\right)-4$$

Відповідь: -4.

1. ***Актуалізація умінь і навичок***
* Що називають многочленом канонічного вигляду?
* Що означає поділити многочлен на многочлен з остачею?

(Поділити многочлен $P\_{n}\left(x\right) $на многочлен $Q\_{m}\left(x\right) $з остачею означає знайти такі многочлени $S\_{l}\left(x\right) $ і $ R\_{k}\left(x\right)$, щоб виконувалась рівність $P\_{h}\left(x\right)==Q\_{m}\left(x\right)∙S\_{l}\left(x\right)++R\_{k}\left(x\right)$, де степінь многочлена $R\_{k}\left(x\right)$ менший степеня многочлена $Q\_{m}(x)\left(k<m\right).$)

* Які ви знаєте способи знаходження частки і остачі?

(Ділення «куточком», метод невизначених коефіцієнтів, схема Горнера).

* В чому полягає метод невизначених коефіцієнтів?
* Що потрібно перш за все зробити, щоб можна було застосувати метод (схему) Горнера?
* На чому грунтується метод Горнера?

(На методі невизначених коефіцієнтів).

1. ***Пояснення нового матеріалу***

Повідомляється тема уроку і мета.

Вчитель.

Якщо ми маємо многочлен $P\_{n}(x)$, який потрібно поділили на двочлен $(x--a)$, де $a$ – будь-яке число, то в результаті ділення ми одержимо частку $S\_{n-1}(x)$і остачу $R\_{k}\left(x\right)$. Тоді $P\_{n}\left(x\right)=\left(x-a\right)∙S\_{n-1}\left(x\right)+R(x)$, $R$ – число, якщо підставити в цю рівність замість $x-a$, то $P\_{n}\left(а\right)=R$.

Якщо остача $R=0$, то це означає, що многочлен поділився націло на двочлен.

**Означення.** Число а називають коренем многочлена Р(x), якщо Р (а )=0.

При розв’язуванні рівнянь виду Р(x)=0, де Р(x) – многочлен, важливо навчитися виділяти в многочлені лінійний множник, тобто подавати многочлен у вигляді добутку:

Р (x) = (*x*-*а*)Q (x ), де Q ($x$) – деякий многочлен, степінь якого на 1 менший від степеня многочлена $ P\left(x\right)$.

***Теорема Безу*** .

 Остача $R$ від ділення многочлена $P\_{n}(x)$ на двочлен $x-a$ дорівнює значенню многочлена в точці $x=a$, тобто

|  |
| --- |
| $$R=P(a)$$ |

*Доведення.*

Нехай $S\left(x\right)$ – неповна частка від ділення многочлена $P(x$ )

на $x-a$:

$$P\left(x\right)=\left(x-a\right)S\left(x\right)+R$$

При $x=a$маємо: $P\left(a\right)=\left(a-a\right)S\left(a\right)+R=R$

$P\left(a\right)=R$. ▲

Історична довідка.

Ет’єн Безу народився 31 березня 1730 року, в місті Немуро, Франція. Життя його сім'ї було пов'язано з політикою, його батько і дід служили в якості окружних суддів. Замість того, щоб слідувати їх прикладу, Безу, на якого в ранньому віці вплинув Леонард Ейлер, вибрав кар'єру в царині математики.

У віці 28 років, Безу став членом Французької Королівської Академії наук.

Значна частина його робіт мала практичний характер, що виник у зв’язку з викладацькою діяльністю. Викладання спонукало Безу проводити дослідження. В 1762 працював над проблемами алгебраїчних рівнянь. З 1763 року Безу викладав математику в училищі гардемаринів. П'ять років потому, в 1768 році він почав працювати з кандидатами в артилерійські офіцери.

Багато сучасників захоплювалися Безу, його вмінням просто пояснювати складні питання. Однак знайшлися і такі, що звинувачували його за спрощений підхід до дисципліни. Справді, Безу займався розв’язуванням алгебраїчних рівнянь, пов'язаних з використанням детермінантів, не зупиняючись на теорії методу.

Хоча він провів важливі дослідження в області алгебраїчних рівнянь, Ет’єна Безу пам’ятають, перш за все, за його внесок у математичну освіту. Найбільш помітним був шеститомний підручник «Курс математики», який писався 5 років, з 1764 по 1769 рік, якраз коли Безу працював учителем французьких військових. Викладаючи, Безу був переконаний, що для підготовки артилерійських офіцерів краще відмовитися від теоретичного підходу на користь практичного, і в результаті у нього розвинувся дуже зрозумілий курс навчання. Це стало основою для підручника, який незабаром став надзвичайно популярним. Цей підручник в свою чергу вплинула на викладання математики на обох сторонах Атлантики. Також, Ет’єн Безу розвинув метод невизначених множників: в елементарній алгебрі його ім'ям названий спосіб розв’язання систем рівнянь, заснований на цьому методі. Частина праць Безу присвячена зовнішньої балістиці.

Основні роботи Ет’єна Безу відносяться до вищої алгебри, вони присвячені створенню теорії розв’язання алгебраїчних рівнянь. В теорії розв'язання систем лінійних рівнянь він, одночасно з Г. Крамером, сприяв виникненню теорії визначників, розвивав теорію винятку невідомих з систем рівнянь вищих ступенів, довів теорему (вперше сформульовану К.Маклореном) про те, що дві криві порядку m і n перетинаються не більше ніж в mn точках.

Безу помер в 1783 році в Бас-Логес, Франції, за шість років до Французької революції, революції соціальних, наукових та інтелектуальних знань країни.

Наслідок 1. При діленні многочлена $P\_{n}(x)$ на лінійний двочлен $ax+b$, то $R=P(-\frac{b}{a})$.

***Теорема 2***. Многочлен $P(x)$ ділиться на двочлен $x-a$ тоді і тільки тоді, коли $x=a$ є коренем многочлена $P(x)$.

*Доведення.*

Нехай $P(x)\vdots (x-a)$. Тоді остача $R $від ділення $P(x)$ на $x-a$ дорівнює нулю. За теоремою Безу $R=P(a)$. Тому $P\left(a\right)=0$, отже $a$ – корінь многочлена $P(x)$.

Навпаки, якщо $a$ – корінь многочлена $P(x)$, то за теоремою Безу остача $R$ без ділення $P(x)$ на $x-a$ дорівнює $R=P\left(a\right)=0$. Отже, $P(x)\vdots (x-a)$. ▲

***Теорема 3.***

Якщо многочлен $P\_{n}(x)$ділиться на $x-a$ та $x-b$, причому $a\ne b$, то він ділиться на добуток $(x-a)(x-b)$.

*Доведення.*

Позначимо частку від ділення многочлена на$ x-a $через$ Q(a)$. Тоді$ P\_{n}\left(x\right)=(x-a)∙Q(a)$.

Коли $x=b$, то $P\_{n}\left(b\right)=(b-a)∙Q(b)$.

Оскільки за умовою $b\ne a$, то $Q\left(b\right)=0$, а це означає, що $Q\left(x\right)$ділиться на $x-b$. Позначивши частку від цього ділення через $Q\_{1}\left(x\right)$одержимо: $Q\left(x\right)=(x-b)∙Q\_{1}(x)$.

І, отже, $P\_{n}\left(x\right)=(x-a)(x-b)∙Q\_{1}(x)$.

Тобто$P(x)\vdots (\left(x-a\right)\left(x-b\right))$. ▲

Приклад. Розглянемо многочлен $P\left(x\right)=x^{3}+2x^{2}-13x+10$.

 Очевидно, що $P\left(1\right)=P\left(2\right)=0$. Тому $P(x)\vdots $ і на $(x-1)$, і на $(x-2)$, тобто він ділиться і на $\left(x-1\right)\left(x-2\right)=x^{2}-3x+2$.

***Корисно запам’ятати:***

1. $\frac{x^{m}-a^{m}}{x-a}=x^{m-1}+x^{m-2}a+x^{m-3}a^{2}+…+a^{m-1}$, $m\in N$.
2. $\frac{x^{2m}-a^{2m}}{x+a}=x^{2m-1}-x^{2m-2}a+x^{2m-3}a^{2}+…+a^{2m-1}$, $m\in N$.
3. $\frac{x^{2n+1}+a^{2n+1}}{x+a}=x^{2n}-x^{2n-1}a+x^{2n-2}a^{2}+…+a^{2n}$, $n\in N$.

Наслідок. Многочлен степеня n має не більше n різних коренів.

Основними мотивами вивчення подільності многочленів є застосування при розкладі многочлена на множники.

Розкласти многочлен на множники означає подати його у вигляді добутку кількох многочленів, кожен з яких містить змінну. Так $2\left(x-2\right)\left(x+2\right) $є розкладом многочлена $2x^{2}-8 $на множники.

* Чи буде добуток$ 2(x^{2}-4)$ - розкладом цього ж многочлена на множники? (Ні)

$P\left(x\right)=Q(x)∙S(x)$, то якщо $Q(x)$ та $S(x)$ многочленами ненульового степеня, то їх добуток є розкладом многочлена на два множники.

Всі многочлени нульового степеня, першого степеня і многочлени другого степеня $P\_{2}\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$, для яких квадратне рівняння $ax^{2}+bx+c=0$ не має коренів, на множники не розкладаються.

*Означення:*

Многочлени, які не можна розкласти на множники, називають незвідними. Усякий многочлен степеня $n\geq 3 $є звідним.

Наприклад:

$$x^{3}-x=x\left(x^{2}-1\right)=x(x-1)(x+1)$$

$$x^{4}+3x^{2}+2=(x^{2}+1)(x^{2}+2)$$

*Алгоритм розкладу многочлена* $P\_{n}(x)$*на множники:*

*1.* Підбираємо (вгадуємо) корінь $x=a$ многочлена $P\_{n}(x)$.

1. Знаходимо частку $P\_{n-1}\left(x\right) $від ділення $P\_{n-1}(x)$ на $x-a $і записуємо $P\_{n}\left(x\right)==P\_{n-1}(x)∙(x-a)$.

Далі розкладаємо на множники $P\_{n-1}(x)$ за даним алгоритмом.

*Але за цим алгоритмом можна розкласти лише многочлени, для яких відомий хоча б один корінь.*

Приклад 1.

Розкласти на множники: $P\_{4}\left(x\right)=x^{4}+3x^{3}+2x^{2}-2x-4$

Підбираємо корінь, за теоремою Безу: $ P\_{4}\left(1\right)=0=R, то$ $x=1$ – корінь многочлена $P\_{4}\left(x\right)$.

Ділимо $P\_{4}\left(x\right)$ на $x-1 $за схемою Горнера.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 3 | 2 | -2 | -4 |
| 1 | 1 | 4 | 6 | 4 | 0 |

$$P\_{4}\left(x\right)=(x-1)(x^{3}+4x^{2}+6x+4)$$

$P\_{3}\left(x\right)=x^{3}+4x^{2}+6x+4$має корінь $x=-2$.

Отримаємо: $P\_{3}\left(x\right)=(x+2)(x^{2}+2x+2)$.

$P\_{2}\left(x\right)=x^{2}+2x+2 $на множники не розкладається. Отже, $P\_{4}\left(x\right)=(x-1)(x++2)(x^{2}+2x+2)$.

Нехай $x=a$ – корінь многочлена $P(x)$. Тоді $P(x)\vdots (x-a)$.

Але може трапитись, що $P(x)$ ділиться ще й на $(x-a)^{2 }$чи навіть $(x-a)^{k}$, то кажуть, що $x=a$ – є $k$-кратним коренем многочлена $P(x)$, а число $k$ називають кратністю цього кореня. Корінь, кратність якого дорівнює 1, називають простим коренем.

1. ***Закріплення нового матеріалу***

Приклад 45.5 ст. 321.

Доведіть, що многочлен $P\left(x\right)$ ділиться націло на многочлен $Q\left(x\right)$:

$P\left(x\right)=(x^{2}-x+1)^{2n}+(x^{2}+x-1)^{2n}-2$*,*$n ϵ N$.

$Q\left(x\right)=x^{2}-x=x\left(x-1\right)=(x-0)(x-1)$.

Доведення.

За теоремою $R=P\left(0\right)=1^{2n}+1^{2n}-2=0$.

$R=P\left(1\right)=(1-1+1)^{2n}+(1+1-1)^{2n}-2=0$. Отже, $P\left(x\right)$ ділиться на $Q\left(x\right)$ націло: $P\left(x\right)\vdots Q\left(x\right)$

Приклад 3.

Чи ділиться націло многочлен $P\left(x\right)=6x^{3}-x^{2}+1 $на $2x+1$.

$R=P\left(-\frac{1}{2}\right)=6(-\frac{1}{2})^{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+1=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+1=0$.

$ Відповідь$: націло.

Приклад 4

 Знайдіть значення $a$, при якому многочлен $P\_{5}\left(x\right)=2x^{5}-3x^{3}+11x^{2}--x+a $при діленні на $x+2 $дає остачу 3.

* Якими способами можна це знайти?

**1 спосіб.**

*( за теоремою Безу)*

$$R=P\_{5}\left(-2\right)=2(-2)^{5}-3\left(-2\right)^{3}+11\left(-2\right)^{2}-\left(-2\right)+a=-64+24+44+2+a=$$

$$=6+a$$

$R=3$, то одержимо $6+a=3;a=-3$.

Відповідь: -3.

 **2 спосіб.**

*(за схемою Горнера)*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 0 | -3 | 11 | -1 | a |
| -2 | 2 | -4 | 5 | 1 | -3 | 3 |

$⇒a=(-3)$.

Відповідь: - 3.

Приклад 5

Остачі від ділення многочлена $P(x)$ на двочлени $x-2$ і $x-3$ відповідно дорівнюють 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)$ на многочлен $x^{2}-5x+6$.

Розв’язання:

Оскільки степінь многочлена $x^{2}-5x+6$ дорівнює 2, то степінь шуканої остачі не більша за 1. Тому остача – це многочлен $ax+b$.

Маємо:

$$P\left(x\right)=\left(x^{2}-5x+6\right)Q\left(x\right)+ax+b;$$

$$P\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x-3\right)Q\left(x\right)+ax+b.$$

Підставляємо по черзі в цю рівність $x=2$ і $x=3$. Отримаємо:

$$P\left(2\right)=2a+b, P\left(3\right)=3a+b.$$

Застосовуючи теорему Безу, маємо: $P\left(2\right)=5$ і $P\left(3\right)=7$. Тоді отримуємо систему:

$$\left\{\begin{array}{c}2a+b=5\\3a+b=7.\end{array}\right.$$

Звідси $a=2$ і $b=1$. Тоді шуканою остачею є многочлен $2x+1$.

Відповідь: $2x+1$.

Приклад 6

Знайдіть кратність кореня $x=a $многочлена $P\left(x\right)$.

 а) $P\left(x\right)=x^{4}-4x^{3}+7x^{2}-12x+12$, $a=2$

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -4 | 7 | -12 | 12 |
| 2 | 1 | -2 | 3 | -6 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 3 | 0 |  |
| 2 | 1 | 2 | 7 |  |  |

 Кратність кореня $a=2$ – два.

$$P\left(x\right)=\left(x-2\right)^{2}(x^{2}+2x+7)$$

(Самостійно)

 б) $P\left(x\right)=x^{5}-5x^{4}-2x^{3}+26x^{2}-31x+11$, $a=1$.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | -5 | -2 | 26 | -31 | 11 |
| 1 | 1 | -4 | -6 | 20 | -11 | 0 |
| 1 | 1 | -3 | -9 | 11 | 0 |  |
| 1 | 1 | -2 | -11 | 0 |  |  |
| 1 | 1 | -1 | -12 |  |  |  |

$P\left(x\right)=\left(x-1\right)^{3}∙(x^{2}+x-12)$***.***

Відповідь: 3.

1. ***Завдання додому.***

А. Г. Мерзляк та інші Алгебра 8 кл.( погл. вивч.) §7, п. 44 - повторити; вивчити п. 45, розібрати приклад 3 ст.320, розв’язати

№ 45.2; 45.4; 45.11.

1. ***Підсумок уроку***
* Що нового ви дізнались?
* Що називають коренем многочлена?
* Сформулюйте теорему Безу.
* Яка необхідна і достатня умова, при якій число а є коренем многочлена?